олимпиада первокурсников
ГУМРФ имени адмирала С.О. МАКАРОВА
по элементарной математике (22.09.21)

1. Из пунктов А и Б навстречу друг другу выехали одновременно два велосипедиста. В 12.00 они встретились, и каждый из них продолжил свой путь. Один из велосипедистов приехал в пункт Б в 13.00, другой — в пункт А в 14.15. Когда стартовали велосипедисты?

Решение:

Пусть скорость 1-го велосипедиста больше скорости второго в k раз. Тогда до места встречи 1-й проехал в k раз большее расстояние, чем 2-й. Значит, 2-му потребуется в k^2 больше времени, чтобы закончить свой маршрут, чем 1-му.

$$\frac{14\frac{1}{4}-12}{13-12}=\frac{9}{4}=k^2 \;\Rightarrow\; k=\frac{3}{2}.$$

Временной интервал от старта до места встречи велосипедистов в k раз меньше, чем потратил 1-й велосипедист на завершение маршрута и в k раз больше, чем потратил 2-й, т.е.

$$T=\frac{14\frac{1}{4}-12}{\left(\frac{3}{2}\right)}=\frac{3}{2}(13-12)=\frac{3}{2}.$$

Ответ. 10.30

2. Сравнить числа $\log_5 6$ и $\log_6 7$.

Решение: $\log_5 6-\log_6 7=\dfrac{1}{\log_6 5}-\log_6 7=\dfrac{1-\log_6 5\log_6 7}{\log_6 5}>0$ так как

$\log_6 5\cdot\log_6 7\le\left(\frac{1}{2}(\log_6 5+\log_6 7)\right)^2=\log_6^2\sqrt{35}<\log_6^2\sqrt{36}=1$.

Ответ: $\log_5 6>\log_6 7$

3. Решить уравнение $\log_2(1+\cos x)-\left|\sin\frac{x}{3}\right|=1.$

Решение: ОДЗ: $\cos x\ne-1$. $\log_2(1+\cos x)=\left|\sin\frac{x}{3}\right|+1.$

$$\log_2(1+\cos x)\le\log_2 2=1;\quad \left|\sin\frac{x}{3}\right|+1\ge 1\ \Rightarrow\begin{cases}\log_2(1+\cos x)=1\\ \left|\sin\frac{x}{3}\right|+1=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x=1\\ \sin\frac{x}{3}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\pi n\\ x=3\pi k\end{cases},$$

$2\pi n=3\pi k,\ 2n=3k,\ \Rightarrow k$ - четно: $k=2l$, $l\in\mathbb{Z}$;

Ответ: $x=6\pi l,\ \ l\in\mathbb{Z}$.

4. В квадрате $ABCD$ взята точка М так, что $\angle MAD=\angle MDA=15^\circ$. Доказать, что ΔBMC правильный.

Решение: Пусть стороны квадрата равны $2a$. Из точки M опустим перпендикуляры ML и MK на стороны AB и AD соответственно. Тогда $ML=a,\ MK=\operatorname{arctg}15^\circ$, $AL=MK=\operatorname{arctg}15^\circ$ и

$\operatorname{tg}\alpha=\frac{ML}{BL}=\frac{a}{2a-a\operatorname{tg}15^\circ}$, где α - угол MBL. Найдем $\operatorname{tg}15^\circ$; $\frac{1}{\sqrt3}=\operatorname{tg}30^\circ=\frac{2\operatorname{tg}15^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 15^\circ}$. Решая квадратное уравнение $x^2+2\sqrt3x-1=0,$ где $x=\operatorname{tg}15^\circ$; и учитывая, что $0<\operatorname{tg}15^\circ<1$, находим: $\operatorname{tg}15^\circ=2-\sqrt3$.

Тогда $\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{2a-a\left(2-\sqrt3\right)}=\frac{1}{\sqrt3}\ \Rightarrow\alpha=30^\circ$, поскольку $0<\alpha<90^\circ.$ Отсюда, так как

треугольник BCM равнобедренный, все его углы равны 60°, то есть треугольник равнобедренный.

5. Найти наибольшее значение функции $f(x)=2x^4-4x^2+3x$ на отрезке $[0;0{,}65]$.

Решение: $f'(x)=8x^3-8x+3=\left(8x^3-1\right)-(8x-4)=(2x-1)\left(4x^2+2x+1\right)-4(2x-1)=$

$(2x-1)\left(4x^2+2x-3\right)$, то $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\\ 4x^2+2x-3=0\end{array}\right.$.

$$4x^2+2x-3=0\ \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{-1+\sqrt{13}}{4}\\ x=\frac{-1-\sqrt{13}}{4}-\textit{посторонний}\quad\textit{корень}\end{array}\right.\qquad x\in[0;0{,}65].$$

Производная $f'(x)$ равна 0 на отрезке $[0;0{,}65]$ только при $x=\frac{1}{2}$, поскольку $\frac{-1-\sqrt{13}}{4}<0$, а $\frac{-1+\sqrt{13}}{4}>0{,}65$.

Находим $f(0)=0$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{8}$.

На $[0{,}5;0{,}65]$

$f'(x)=4(2x-1)\left(x+\frac{\sqrt{13}+1}{4}\right)\left(x-\frac{\sqrt{13}-1}{4}\right)\le 0$, поэтому $f\left(\frac{1}{2}\right)>f(0{,}65)$.

Ответ: $\frac{5}{8}$

6. Найти последнюю цифру числа: $1^3+2^3+3^3+...+2021^3$.

Решение: Для $k=0,1,2,3,...n$ и $l=0,1,2,3,...9$ последняя цифра числа $(10k+l)^3$ совпадает с последней цифрой числа l^3, а ноль – последняя цифра числа $(10k+l)^3+(10n+l)^3$, где $n=1,2,3,...$. Тогда последняя цифра суммы $(10k+1)^3+(10n+2)^3+...+(10k+9)^3+(10n+10)^3$, где $k=0,1,2,3,...2021$, та же, что и суммы $1^3+2^3+3^3+...+9^3$ $+1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+(10-4)^3+(10-3)^3+(10-2)^3+(10-1)^3$, то есть равно 5

7. Даны вещественные числа $a_1,a_2,...a_n$; причем $a_1+a_2+...+a_n=1$. Доказать, что $a_1^2+a_2^2+...+a_{2021}^2\ge\frac{1}{2021}$.

Решение:

Пусть $n=2021$. Имеем, $a_1{}^2+a_2{}^2+...+a_n{}^2=\left(\left(a_1{}^2+\frac{1}{n^2}\right)+\left(a_2{}^2+\frac{1}{n^2}\right)+...+\left(a_n{}^2+\frac{1}{n^2}\right)\right)-\frac{1}{n}\ge$
$\ge\left(2\frac{a_1}{n}+2\frac{a_2}{n}+...+2\frac{a_n}{n}\right)-\frac{1}{n}=\frac{2}{n}-\frac{1}{n}=\frac{1}{n}$.

8. Доказать, что $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{4^{2021}}>2021$.

Решение: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^{4042}}=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+...+\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\frac{1}{2^{k-1}+2}+...+\frac{1}{2^k}\right)+$

$+...+\left(\frac{1}{2^{4041}+1}+\frac{1}{2^{4041}+2}+...+\frac{1}{2^{4042}}\right)>\frac{1}{2}\cdot 4042=2021$, поскольку

$\underbrace{\frac{1}{2^{k-1}+1}+\frac{1}{2^{k-1}+2}+...+\frac{1}{2^k}}_{2^{k-1}\text{слагаемых}}>\frac{2^{k-1}}{2^k}=\frac{1}{2}$ при $2\le k\le 4042$.