Министерство образования и науки Российской Федерации
Санкт-Петербургский государственный
университет информационных технологий,
механики и оптики

Региональная студенческая математическая олимпиада Санкт-Петербурга 2010г.

Санкт-Петербург
2010

В 2000 - 2010 гг. студенческая олимпиада г. Санкт-Петербурга по математике проводилась Санкт-Петербургским государственным университетом информационных технологий, механики и оптики (СПбГУ ИТМО). Осенью 2010 г. Комитет по науке и высшей школе Санкт-Петербурга предложил несколько изменить правила олимпиады. Она проводилась в два тура. Во второй тур проходили 8 участников, набравших наибольшее количество баллов в первом туре. Результаты командного зачета определялись в первом туре. Второй тур служил для выявления трех абсолютных победителей в личном зачете. Команды в первом туре были разбиты на три группы по количеству часов курса высшей математики в вузе. В первую группу вошли вузы с объемом курса, превышающим 550 часов, во вторую - с объемом от 400 до 550 часов, в третью - с объемом менее 400 часов. Каждый вуз мог выставить одну или две команды по 3 человека (в командный зачет входили все участники команды) и студентов в личный зачет. В личном зачете участвовали все заявленные студенты. Результат вуза в командном зачете определялся по результату лучшей из его команд (если их две), причем определялись как абсолютные результаты (среди всех вузов), так и результаты по указанным группам вузов.

Олимпиада проводилась в воскресенье 24 октября 2010 года (1 тур) и 21 ноября 2010 года (второй тур). На решение задач отводилось 4 часа. Пользоваться справочной литературой не разрешалось. Студентам всех групп было предложено 12 задач в первом туре и 8 задач во втором.

Председателем жюри был профессор СПбГУ Н.А. Широков. В оргкомитет олимпиады входили: ректор СПбГУ ИТМО, проф., д.т.н. Васильев В.Н., проф., д.ф.-м.н Попов И.Ю., доц., к.ф.-м.н. Фролов В.М., доц., к.ф.-м.н. Лобанов И.С., асс. Трифанов А.И., асс. Лоторейчик В.Ю., доц. Блинова И.В., доц. Трифанова Е.С.

Составители: проф., д.ф.-м.н. Н.А. Широков, проф., д.ф.-м.н. Попов И.Ю., доц.: к.ф.-м.н. Фролов В.М., к.ф.-м.н. Рыжков А.Е., к.ф.-м.н. Трифанова Е.В, к.т.н. Блинова И.В., к.ф.-м.н. Лобанов И.С., ст. преп. Родина Т.В., асс.: Трифанов А.И., Петтай П.П., Лоторейчик В.Ю.

Задачи 1-го тура олимпиады
24 октября 2010 года

1. Сколько положительных чисел среди первых 100 членов последовательности $a_n = \sin(10^n)°,\ \ n = 0,1,2,...?$ (3 балла)

2. Луч света движется по прямой $x-1=(y-3)/2=(z-4)/3,$ координатные плоскости зеркальны. Найти уравнение луча после всех отражений. (3 балла)

3. Дифференцируемая функция $f(x)$ такова, что $f(1)=1$ и для всех $x \ge 1:\ \ f'(x) = \dfrac{1}{x^2+f^2(x)}$. Доказать, что $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ существует и меньше $1+\dfrac{\pi}{4}$. (3 балла)

4. Последовательность $\{a_n\}$ такова, что для всех $n \ge 1$: $(2-a_n)a_{n+1}=1.\quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = ?$ (3 балла)

5. Найти все такие непрерывно-дифференцируемые функции $f(x)$, что $f(0)=0$ и $|f'(x)| \le |f(x)|$ для любого x. (6 баллов)

6. Непрерывная функция $f,\ f: R \to R,$ такова, что при любом иррациональном значении x значение $f(x)$ рационально. Найти все такие функции. (6 баллов)

7. Доказать, что решение задачи Коши $y' = \cos^{2010}(\pi y), y(0)=1/4,$ ограничено на всей оси. (6 баллов)

8. Пусть $a,b>0, A=\begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{pmatrix}$. Найти такую квадратную матрицу B, что $B^8 = A$. (6 баллов)

9. Пусть $a(x), b(x), c(x), e(x)-$ полиномы. Доказать, что полином $F(x)=\int\limits_1^x a(x)c(x)dx \cdot \int\limits_1^x b(x)e(x)dx - \int\limits_1^x a(x)e(x)dx \cdot \int\limits_1^x b(x)c(x)dx$ делится на $(x-1)^4$. (9 баллов)

10. Эллипс с полуосями a,b катится без проскальзывания по кривой $y = c\sin(x/a)$. При каком соотношении a,b,c эллипс совершает ровно один оборот при перемещении на один период кривой (т.е. найти необходимое условие, при котором периметр эллипса равен длина периода кривой)? (9 баллов)

11. Для каких λ уравнение $\int\limits_0^1 \min\{x,y\} f(y)dy = \lambda f(x)$ имеет непрерывные не равные тождественно нулю решения на $(0,1)$? Каковы эти решения? (9 баллов)

12. Найти сумму ряда $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{1}{2^5}+\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{6}{7}\cdot\dfrac{1}{2^7}+...$. (9 баллов)

Количество участников, решивших задачи (определено по формуле: полная сумма набранных всеми участниками баллов за задачу, деленная на стоимость задачи).

№ задачи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Кол-во решивших	74	34	25	34	15	9	9	28	15	7	8	5

Решения задач 1-го тура

1. При $n>3$ будет выполнено разложение $10^n = 10^3 + (10^n - 10^3) = 10^3 + 10^3(10^{n-3}-1).$ Так как последнее слагаемое в этом разложении делится на 360, то при $n>3$ справедливо

$a_n = \sin(360^\circ k + 1000^\circ) = \sin(1000^\circ) < 0$. Положительные числа только $sin(1^\circ), sin(10^\circ)$, $sin(100^\circ)$.Ответ: 3 положительных числа.

2. Луч, заданный параметрически

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 4 + 3t \end{cases}.$$

не параллелен ни одной из координатных плоскостей. Следовательно, его продолжение пересечет все координатные плоскости, т.е. он испытывает три отражения. После каждого отражения меняет знак одна из координат (x_0, y_0, z_0) и соответствующая координата направляющего вектора. После трех последовательных отражений получим

$$\begin{cases} x = -1 - t \\ y = -2 - 2t \\ z = -4 - 3t \end{cases} \quad \text{или} \quad x + 1 = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{3}.$$

3. Так как $f'(x) > 0, \forall x$, то, f строго возрастает. Следовательно, $f(t) > f(1) = 1$ для $t \geq 1$. Поэтому

$$f'(t) = \frac{1}{t^2 + f^2(t))} < \frac{1}{t^2 + 1}, \quad \text{для } t \geq 1.$$

Требуемая оценка получается следующим образом

$$f(x) = 1 + \int_1^x f'(t)dt < 1 + \int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt < 1 + \int_1^\infty \frac{1}{1+t^2} dt < 1 + \frac{\pi}{4}.$$

4. Возможны три случая:

- если $a_n = 1$ для некоторого n, то $a_n = 1$ для всех n. В этом случае $lim_{n\to\infty} a_n = 1$.
- если $a_n = 2$ для некоторого n, то далее рекуррентность продолжить невозможно. Разворачивая рекуррентность в обратную сторону до первого члена, получим, что $a_1 = \frac{n+1}{n}$. Таким образом, если первый член последовательности имеет вид $\frac{n+1}{n}$ при некотором натуральном n, то предела не существует.
- в остальных случаях можно сделать подстановку:

$$b_{n+1} = \frac{1}{1 - a_{n+1}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2 - a_n}} = \frac{2 - a_n}{1 - a_n} = b_n + 1, \qquad \text{для всех } n.$$

Имеем $b_n = b_1 + n - 1$ и $a_n = 1 - \frac{1}{b_n} = \frac{b_1 + n - 2}{b_1 + n - 1}$. Откуда легко получить

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b_1 + n - 2}{b_1 + n - 1} = 1.$$

5. Пусть f не равна тождественно нулю. Из непрерывности f следует существование таких a и b, что $f(a) = 0$, $|a - b| < 1$, и $|f(b)|$ есть наибольшее значение $|f(x)|$ на отрезке $[a,b]$. По теореме о среднем существует точка $c \in [a,b]$ такая, что

$$|f'(c)| = \left|\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right| = \left|\frac{f(b)}{b - a}\right| > |f(b)|.$$

Благодаря нашему выбору b, $|f(b)| \ge |f(c)|$, тогда $|f'(c)| > |f(c)|$, что противоречит условию задачи. Следовательно, f тождественно равна нулю.

6. В силу непрерывности $f : R \to R$ образ $f(R)$ вещественной прямой R − это прямая, луч, промежуток или точка. Множество рациональных чисел Q счётно, поэтому $f(Q)$ не более чем счётно. Множество $f(R \setminus Q)$ не более чем счётно по условию задачи. Значит $f(R)$ не более чем счётно. Можно сделать вывод, что $f(R)$ − точка, т.е. искомые функции − это рациональные постоянные $f(x) = C \in Q$.

7. Теорема существования и единственности решения дифференциального уравнения 1-го порядка выполнена на всей плоскости XOY. Функции $y = \pm 1/2$ есть решения дифференциального уравнения, что проверяется непосредственной подстановкой. Поэтому существует решение задачи Коши с начальными данными $x = x_0, y = y_0$, где x_0 любое, а $|y_0| < 1/2$. Это решение не должно пересекать прямые $y = \pm 1/2$. Поэтому для решения $y = y(x)$ задачи Коши с начальными данными $(0, 1/4)$ выполняется неравенство $|y| < 1/2$.

8. Перепишем матрицу A в следующем виде:

$$A = \begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Будем искать матрицу B в виде

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{x}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \boldsymbol{y}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (*)$$

Тогда

$$B^2 = x^2\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + y^2\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 2x^2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 2y^2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B^4 = 8x^4\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 8y^4\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } B^8 = 128x^8\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 128y^8\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как $A = B^8$, то $a = 128x^8$ и $b = 128y^8$. Откуда: $\begin{cases} x = \sqrt[8]{a/128}, \\ y = \sqrt[8]{b/128}. \end{cases}$

Эти значения нужно подставить в уравнение (*), чтобы получить искомую матрицу $\boldsymbol{B}$.

9. Непосредственной подстановкой легко убедиться, что $F(1) = 0$, следовательно, $F(x)$ делится на $(x-1)$. Далее берем производную от функции $F(x)$

$$F'(x) = ac\int_1^x bedx + be\int_1^x acdx - ae\int_1^x bcdx - bc\int_1^x aedx.$$

Откуда непосредственной подстановкой $F'(1) = 0$. Берем вторую производную функции $F(x)$

$$F''(x)=(ac)'\int_1^x bedx+(be)'\int_1^x acdx-(ae)'\int_1^x bcdx-(bc)'\int_1^x aedx+acbe+beac-aebc-bcae=$$

$$=(ac)'\int_1^x bedx+(be)'\int_1^x acdx-(ae)'\int_1^x bcdx-(bc)'\int_1^x aedx.$$

Откуда $F''(1)=0$. И далее третью производную функции $F(x)$

$$F'''(x)=(ac)''\int_1^x bedx+(be)''\int_1^x acdx-(ae)''\int_1^x bcdx-(bc)''\int_1^x aedx+(ac)'be+(be)'ac-(ae)'bc-(bc)'ae.$$

Внеинтегральный член в последней формуле равен $((ac)(be))'-((ae)(bc))'=0$. Значит, $F'''(1)=0$. Из обнуления функции $F(x)$ и ее трех производных в точке x=1 можно заключить, что $F(x)$ делится на $(x-1)^4$.

10. Условие означает, что периметр эллипса совпадает с длиной кривой $y=c\sin\dfrac{x}{a}$ на одном периоде, то есть имеет место уравнение

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{(-a\sin\varphi)^2+(b\cos\varphi)^2}\,d\varphi=\int_0^{2\pi a}\sqrt{1+(\frac{c}{a}\cos\frac{x}{a})^2}\,dx.$$

В интеграле в правой части последнего уравнения можно сделать замену $\varphi={}^{x}\!/_{a}$ и представить 1, как $\sin^2\varphi+\cos^2\varphi$. Тогда получаем

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi}\,d\varphi=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2\varphi+(a^2+c^2)\cos^2\varphi}\,d\varphi.$$

Так как левая часть в последнем уравнении монотонно возрастает с ростом b^2, то существует единственное значение b^2, при котором выполнено равенство. Ответ: $b^2=a^2+c^2$.

11. Перепишем интегральное уравнение в виде

$$\lambda f(x)=\int_0^x yf(y)dy+x\int_x^1 f(y)dy \qquad (1)$$

Если $\lambda\neq 0$, то f дифференцируема. Тогда можно продифференцировать уравнение (1) и получить

$$\lambda f'(x)=xf(x)-xf(x)+\int_x^1 f(y)dy=\int_x^1 f(y)dy \qquad (2)$$

Значит, f' дифференцируема. Тогда можно продифференцировать уравнение (2) и получить дифференциальное уравнение на функцию f вида

$\lambda f''(x)=-f'(x)$ (3)

При $\lambda=0$ мы получим $f(x)=0$, то есть нас интересует $\lambda\neq 0$. Решения дифференциального уравнения (3) имеют вид

$$f(x)=A\cos(\mu x)+B\sin(\mu x)\text{, при }\lambda>0,\ \mu=\lambda^{-1/2},$$

$$f(x)=A\operatorname{ch}(\nu x)+B\operatorname{sh}(\nu x)\text{, при }\lambda<0,\ \nu=(-\lambda)^{-1/2}.$$

Из (1) следует $\lim_{x\to 0+}f(x)=0$, тогда $A=0$. Из (2) следует $\lim_{x\to 1-}f(x)=0$, тогда в зависимости от знака λ получаем два условия $B\mu\cos(\mu)=0$ или $B\nu\operatorname{ch}(\nu)=0$, но,

$\mathrm{ch}(\nu) \neq 0$, следовательно, $B = 0$ и при $\lambda < 0$ все решения уравнения (1) тривиальны. При $\lambda > 0$ нетривиальное решение будет при условии $\cos(\mu) = 0$, то есть при $\lambda = \mu^{-2} = \dfrac{4}{(2k+1)^2 \pi^2}, k = 0,1,2,...,$ и решения уравнения имеют вид $f(x) = B\sin((2k+1)\pi/2\, x)$.

12. Рассмотрим функциональный ряд

$$S(x) = x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}x^5 + \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}x^7 + ...$$

Этот ряд сходится при $|x| < 1$ и допускает почленное дифференцирование. Тогда

$$S'(x) = 1 + x\left(2x + \frac{2}{3}\cdot 4x^3 + \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot 6x^6 + ...\right) = 1 + x\frac{d}{dx}\left(x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}x^6 + ...\right) = 1 + x\frac{d}{dx}\big(xS(x)\big) =$$
$$= 1 + xS(x) + x^2 S'(x)$$

Т. е. $S(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $(1 - x^2)S'(x) = 1 + xS(x)$ и кроме того $S(0) = 0$. На интервале (-1,1) задача Коши для данного линейного дифференциального уравнения имеет единственное решение. Оно находится стандартным образом с помощью замены переменной $S(x) = \dfrac{U(x)}{\sqrt{1-x^2}}$. Выполняя ряд вычислений, можно получить, что решение дифференциального уравнения имеет вид $S(x) = \dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.

Сумма числового ряда, приведенного в задаче, равна $S(1/2) = \dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

Ранжированный список команд вузов участников 1-го тура студенческой олимпиады Санкт-Петербурга по математике 2010-11 учебного года.

	ВУЗ / ФИО участника	ВЕС задачи / номер задачи												Сумма баллов участника	Сумма баллов команды	Командное место
	ВЕС задачи	3	3	3	3	6	6	6	6	9	9	9	9			
	номер задачи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12			
	ПМ-ПУ СПбГУ															
1	Миронов Борис Дмитриевич	2	3	3	1	6	1	6	6	9			0	37	134	**1**
2	Долгополик Максим Владимирович	3			3		0	1	6	9		7	0	28,5		
3	Басков Олег Владимирович	3	3	3	3	6	6	6	6	9	9	7	8	68,5		
	Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики (ИТМО)															
1	Соколов Дмитрий Олегович	3	3	3	3	0	1	1	3	1			1	18	107,5	**2**
2	Буздалов Максим Викторович	3	3	3	3		0		5	9	9	3	6	44		
3	Банных Антон Геннадьевич	3	3	3	3	6		6	6		9	1	6	45,5		
	Балтийский государственный технический университет «ВоенМех» им. Д.Ф.Устинова (БГТУ)															

1	Мостовых Павел Сергеевич	3	3	3	2	1	6	6	6	9	9	1	0	49	60	**3**
2	Егоров Александр Викторович	3	2	1	1		0	0	0	0	3		0	8,5		
3	Маракуева Ольга Валерьевна	2	1								0		0	2,5		
Санкт-Петербургский государственный технологический институт (технический университет) (ГТИ(ТУ))																
1	Бодалев Иван Сергеевич	1	1	3	1	1	1		6	0				13,5	27	**4**
2	Демидов Иван Викторович	3	3		1				1		2			10		
3	Бажукова Галина Васильевна	3		1							0		0	3,5		
Государственная морская академия им. адм. С.О. Макарова (ГМА)																
1	Шибеко Владимир Константинович	3			3				0	0	1		0	6,5	24,5	**5**
2	Савостин Сергей Сергеевич	3	2		1				6				0	12		
3	Подобед Алексей Петрович	3	1		3									6		
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет (ЛЭТИ)																
1	Алексеева Елена Сергеевна	2	2		0				4					8	22	**6**
2	Кротов Сергей Викторович	2	1	3	1	3	0	3	0				0	12,5		
3	Захаров Андрей Сергеевич	0	0	0	2	0								1,5		
Северо-Западный заочного государственный технический университет (СЗТУ)																
1	Шаргалин Алексей Юрьевич	3	3	3	3		1							13	21	**7**
2	Придачин Николай Юрьевич	3	3		1	1	0	1						8		
3	Смирнов Евгений Андреевич	0			0									0		
Санкт-Петербургский государственный университет водных коммуникаций (ГУВК)																
1	Павлов Сергей Михайлович	3			2		0		4					9	19	**8-10**
2	Журавлев Андрей Михайлович	3	2			0			0					5		
3	Павлов Тимофей Викторович	3			2									5		
Военно-космическая академия им. А.Ф. Можайского (ВКА)																
1	Санников Андрей Михайлович	3	1	2	2			0	5				0	12	19	**8-10**
2	Сахно Виктор Игоревич	3		0				1	3					6,5		
3	Гурьев Ефим Сергеевич	0			1				0					0,5		
Российский государственный гидрометеорологический университет (РГГМУ)																
1	Силин Павел Игоревич	3	3		1	0	0		6				0	12,5	19	**8-10**
2	Цейтлин Виталий Игоревич	3	0						2	0				5		
3	Маслов Андрей Сергеевич			0	0	1		1						1,5		

Военный инженерно-технический институт (ВИТИ)																
1	Коныгин Игорь Олегович	2	0		2	0		0			0		0	4	11,5	**11**
2	Баринов Антон Юрьевич	3	0	0	0	0		1	0					3,5		
3	Сизов Сергей Владимирович	3			1			0		0				4		
Санкт-Петербургский государственный университет сервиса и экономики (СПбГУ СиЭ)																
1	Осиненко Антон Анатольевич	0	1	0		1		0				0		2	6	**12**
2	Данилевич Дарья Дмитриевна	1		0	0		0		0		0			1		
3	Колосов Александр Александрович	3					0		0					3		

Ранжированный список участников математической олимпиады вузов Санкт-Петербурга 2010 г.

ФИО	ВУЗ	ВЕС задачи (макс. колличество баллов) / номер задачи												Кол-во балл	Место
		3	3	4	4	4	5	6	6	8	7	9	9		
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12		
Басков Олег Владимирович	СПбГУ ПМ-ПУ	3	3	3	3	6	6	6	6	9	8,5	7	8	68,5	1
Кевер Михаил Еневич	ИТМО	3	0,5	3	3	6	6	6	6	9	9		7	58,5	2
Мостовых Павел Сергеевич	БГТУ	3	3	3	2	1	6	6	6	9	9	1	0	49	3
Смирнов Андрей Борисович	СпбГУ Ф	3	3	3	1	6	1	6	6	9	0,5	9	0	47,5	4
Банных Антон Геннадьевич	ИТМО	3	2,5	3	3	6		6	6		9	1	6	45,5	5
Буздалов Максим Викторович	ИТМО	3	3	3	3		0		5	9	9	3	6	44	6
Порецкий Александр Сергеевич	СпбГУ Ф	0	3	0	0	6	0	0	6	9	0,5	9	9	42,5	7
Давыдов Андрей Анатольевич	ИТМО	3	3	3	2,5	6	5,5			9	9			41	8
Пчелин Владимир Александрович	СпбГУ Ф	3	0,5	3	1,5	6	1	0	6	9	0	9		39	9
Миронов Борис Дмитриевич	СПбГУ ПМ-ПУ	2	3	3	1	6	1	6	6	9			0	37	10
Сандомирский Федор Алексеевич	СпбГУ Ф		3	3	3	6	6		6			9	0	36	11
Куликов Анатолий Борисович	СпбГУ Ф	3	3	3	3	2	6	0	4	9	0		1	34	12
Аксенов Виталий Евгеньевич	ИТМО	2	3	3	1,5	2		0,5	6	9	0	3	1	31	13
Прохоров Андрей Олегович	СпбГУ Ф	2	3	2	2,5	2	0	0	6	9	3	0	0	29,5	14
Долгополик Максим Владимирович	СПбГУ ПМ-ПУ	3			3		0	0,5	6	9		7	0	28,5	15
Викулаев Павел Сергеевич	СпбГУ Эк	2		3	3	6	1	1,5	6	0,5				23	16
Зарубкин Евгений Олегович	ИТМО	0	2	3	1	6	0	1	6			3	0	22	17
Копытов Дмитрий	НовГУ	3	1		1			0,5	6	9			0	20,5	18

Алексеевич															
Горохова Евгения Андреевна	СпбГУ Эк	3	2	0,5	2,5		6		6		0	0		20	19-20
Фадеев Евгений Сергеевич	СпбГУ Эк	0,5	0,5	3	1			0	6	9				20	19-20
Шевченко Дмитрий Сергеевич	ИТМО	3	3	3	3		0,5		6					18,5	21-22
Майоров Михаил Александрович	ИТМО	0	0,5	3	3		6		6					18,5	21-22
Соколов Дмитрий Олегович	ИТМО	3	3	3	2,5	0	0,5	1	3	1			1	18	23
Соколов Олег Владимирович	ИТМО	3	1	0,5	1		0		6	0	0,5	4	0	16	24
Сполан Сергей Анатольевич	ИТМО	3	1	3	0,5	1	0	0,5	6					15	25
Демьянюк Виталий Юрьевич	ИТМО	3	2		3				6					14	26
Бодалев Иван Сергеевич	ГТИ(ТУ)	1	1	3	1	1	0,5		6	0				13,5	27
Шаргалин Алексей Юрьевич	СЗТИ	3	3	3	3		1							13	28-29
Лукьянец Евгений Александрович	ИТМО	3	0,5	0,5	3	6							0	13	28-29
Комаров Андрей Валерьевич	ИТМО	3	2,5		0	1	0		6					12,5	30-32
Кротов Сергей Викторович	ЛЭТИ	2	1	3	0,5	3	0	3	0				0	12,5	30-32
Силин Павел Игоревич	РГГМУ	3	3		0,5	0	0		6				0	12,5	30-32
Савостин Сергей Сергеевич	ГМА	3	2		1				6				0	12	33-34
Санников Андрей Михайлович	ВКА	3	0,5	1,5	2			0	5				0	12	33-34
Демидов Иван Викторович	ГТИ(ТУ)	3	3		1				1		2			10	35
Сначева Александра Андреевна	НовГУ	3	1		0,5	0		5	0	0		0		9,5	36-37
Грибанов Антон Васильевич	СПбГУ СиЭ	3			0,5		0	0	6				0	9,5	36-37
Павлов Сергей Михайлович	ГУВК	3			2		0		4					9	38-39
Тратканов Дмитрий Алексеевич	ГТИ(ТУ)	3	3	3					0					9	38-39
Егоров Александр Викторович	БГТУ	3	2	0,5	0,5		0	0	0	0	2,5		0	8,5	40
Придачин Николай Юрьевич	СЗТИ	3	3		0,5	1	0	0,5						8	41-42
Алексеева Елена Сергеевна	ЛЭТИ	2	2		0				4					8	41-42
Титов Алексей Сергеевич	БГТУ	3	2		0,5	1	0		0	0			1	7,5	43
Шибеко Владимир Константинович	ГМА	3			3				0	0	0,5		0	6,5	44-48
Сахно Виктор Игоревич	ВКА	3		0				0,5	3					6,5	44-48
Тюменцев Тимофей Александрович	ВКА	3			2						0,5		1	6,5	44-48
Ложкин Алексей Геннадьевич	НовГУ	3			1,5	0			0				2	6,5	44-48
Чугаев Олег Константинович	РГГМУ	3	3		0,5			0	0					6,5	44-48

Подобед Алексей Петрович	ГМА	3	0,5		2,5									6	49-52
Шнейдер Ксения Владимировна	СпбГУ Эк	3	0	0	3	0	0		0					6	49-52
Иванова Ирина Владимировна	ГТИ(ТУ)	3	3	0	0				0					6	49-52
Суханова Нина Алексеевна	НовГУ	3	3	0	0	0		0	0				0	6	49-52
Зорин Иван Сергеевич	ГМА	3	0,5		2						0		0	5,5	53-54
Сахно Дмитрий Игоревич	ВКА	3		0,5	0,5	0		0	0		0,5	0	1	5,5	53-54
Журавлев Андрей Михайлович	ГУВК	3	2			0			0					5	55-57
Павлов Тимофей Викторович	ГУВК	3			2									5	55-57
Цейтлин Виталий Игоревич	РГГМУ	3	0						2	0				5	55-57
Мамин Владислав Шамилевич	ГТИ(ТУ)	2	1	0	1,5				0				0	4,5	55-57
Коныгин Игорь Олегович	ВИТИ	2	0		2	0		0			0		0	4	59-65
Сизов Сергей Владимирович	ВИТИ	3			1			0		0				4	59-65
Мошков Григорий Дмитриевич	ВИТИ	3	0	1	0									4	59-65
Станкевич Дмитрий Сергеевич	ВИТИ	3	1	0		0								4	59-65
Рост Аркадий Юрьевич	ИТМО	1			1	2			0	0			0	4	59-65
Прудников Иван Анатольевич	НовГУ	3	1	0	0				0				0	4	59-65
Кузнецов Максим Юрьевич	НовГУ	3			1	0	0		0					4	59-65
Баринов Антон Юрьевич	ВИТИ	3	0	0	0	0		0,5	0					3,5	66-69
Бажукова Галина Васильевна	ГТИ(ТУ)	3		0,5							0		0	3,5	66-69
Липатов Александр Владимирович	НовГУ	3			0			0,5	0	0			0	3,5	66-69
Тарлецкий Михаил Александрович	НовГУ	2,5		0	0			1						3,5	66-69
Кучеренко Евгения Владимировна	ГМА	3		0			0		0				0	3	70-81
Рудюк Евгения Сергеевна	ГМА	3		0			0		0				0	3	70-81
Чертилов Владимир Андреевич	ГМА	3			0				0					3	70-81
Рыхманов Артем Сергеевич	ГМА	0	0,5	0	2,5						0	0	0	3	70-81
Рыбкин Илья Сергеевич	ГМА	3							0					3	70-81
Елагин Кирилл Владимирович	ИТМО								1	1			1	3	70-81
Варганов Олег Дмитриевич	ГУВК	3		0	0	0					0			3	70-81
Павлов Андрей Сергеевич	ГУВК	3		0	0	0		0					0	3	70-81
Тетерин Михаил Александрович	ГТИ(ТУ)	2		0	1				0				0	3	70-81
Колосов Александр Александрович	СПбГУ СиЭ	3					0		0					3	70-81

Новикова Снежана Олеговна	СПбГУ СиЭ	3			0	0								3	70-81
Семидетко Дарья Сергеевна	СПбГУ СиЭ	2	1	0				0	0					3	70-81
Фомченков Евгений Викторович	ГМА	2	0,5		0				0				0	2,5	82-83
Маракуева Ольга Валерьевна	БГТУ	2	0,5								0		0	2,5	82-83
Авраменко Кирилл Илларионович	СЗТУ	2	0										0	2	84-89
Пресняков Артур Андреевич	ВИТИ	2		0	0			0					0	2	84-89
Рыбкин Никита Геннадьевич	ИТМО	0	1	0	1		0							2	84-89
Шашкова Анна Александровна	БГТУ	2		0										2	84-89
Осиненко Антон Анатольевич	СПбГУ СиЭ	0	1	0		1		0				0		2	84-89
Мареичев Алексей Андреевич	СПбГУ СиЭ	2	0		0			0					0	2	84-89
Ганиев Ильдар Марсович	ВИТИ	1	0	0		0		0,5						1,5	90-93
Трифонов Евгений Валерьевич	БГТУ	1,5		0					0					1,5	90-93
Захаров Андрей Сергеевич	ЛЭТИ	0	0	0	1,5	0								1,5	90-93
Маслов Андрей Сергеевич	РГГМУ			0	0	1		0,5						1,5	90-93
Щербаков Максим Юрьевич	ВКА		1						0					1	94-99
Кошелев Александр Анатольевич	БГТУ	1							0					1	94-99
Лакомова Ирина Михайловна	БГТУ	1			0				0					1	94-99
Шевчук Никита Олегович	РГГМУ	0			0	1		0	0					1	94-99
Данилевич Дарья Дмитриевна	СПбГУ СиЭ	1		0	0		0		0		0			1	94-99
Попцова Наталья Александровна	СПбГУ СиЭ	1							0				0	1	94-99
Гурьев Ефим Сергеевич	ВКА	0			0,5				0					0,5	100-103
Веселова Валерия Евгеньевна	ГТИ(ТУ)	0	0	0	0	0		0,5					0	0,5	100-103
Егорихин Никита Олегович	ГТИ(ТУ)			0,5	0				0		0		0	0,5	100-103
Гретченко Мария Анатольевна	СПбГУ СиЭ	0	0,5	0				0		0			0	0,5	100-103
Ершов Андрей Александрович	СЗТУ		0									0	0	0	104-115
Яшук Антон Витальевич	СЗТУ	0											0	0	104-115
Смирнов Евгений Андреевич	СЗТУ	0			0									0	104-115
Ефимов Вадим Вячеславович	ГМА	0			0	0		0	0					0	104-115
Макаров Арсений Михайлович	ГМА	0		0	0				0				0	0	104-115
Лукьянченко Николай Александрович	ВИТИ								0					0	104-115
Грабов Валентин Станиславович	ВИТИ				0			0					0	0	104-115

Прокопенко Илья Игоревич	ВИТИ	0	0										0	0	104-115
Харлан Ярославна Викторовна	ГУВК								0					0	104-115
Антоневич Александра Михайловна	СПбГУ СиЭ	0												0	104-115
Гусева Ирина Вячеславовна	СПбГУ СиЭ	0									0			0	104-115
Макеева Дарья Сергеевна	СПбГУ СиЭ	0	0	0	0	0	0							0	104-115

Командные результаты по группам

I группа

вуз	Кол-во баллов	Место в группе
ПМПУ	134	1 (1 ст.)
СПбГУ (Ф)	117,5/108	2 (2 ст.)
ИТМО	107,5/64,5	3 (2 ст.)
БГТУ	61/10,5	4 (3 ст.)
НовГУ	36/11	5
ГЭТУ	22	6

II группа

вуз	Кол-во баллов	Место в группе
СПбГУ(Э)	63	1 (1 ст.)
СПГТИ(ТУ)	27/8	2 (2 ст.)
ГУВК	19/6	3 (3 ст.)
ВКА	19/13	3 (3 ст.)
ВИТИ	11,5/1,5	5

III группа

вуз	Кол-во баллов	место в группе
ГМА	24,5/6	1 (1 ст.)
СЗГТУ	22/2	2 (2 ст.)
РГГМУ	19/7,5	3 (3 ст.)
ГТУРП	15,5	4 (3 ст.)
СПбГУСЭ	6/3,5	5

Личные результаты по группам после первого тура

I группа

Участник	вуз	кол-во баллов	место в группе	диплом
Басков О.В.	ГУ(ПМПУ)	68,5	1	1 ст.
Кевер М.Е.	ИТМО	58,5	2	2 ст.
Мостовых П.С.	БГТУ	50	3	2 ст.
Смирнов А.Б.	СПГУ(Ф)	47,5	4	2 ст.
Банных А.Г.	ИТМО	45,5	5	2 ст.
Буздалов М.В.	ИТМО	44	6	2 ст.
Порецкий А.С.	СПГУ(Ф)	42,5	7	2 ст.
Давыдов А.А.	ИТМО	41	8	2 ст.
Пчелин В.А.	СПГУ(Ф)	39	9	3 ст.
Миронов Б.Д.	ГУ(ПМПУ)	37	10	3 ст.
Сандомирский Ф.А.	СПГУ(Ф)	36	11	3 ст.
Куликов А.Б.	СПГУ(Ф)	34	12	3 ст.
Аксенов В.Е.	ИТМО	31	13	3 ст.

Примечание. Окончательные личные результаты первых восьми участников определялись во втором туре. Банных А.Г. во втором туре занял первое место, поэтому ему вручен диплом 1 степени.

Копытов Д.А. (НовГУ) награжден поощрительным дипломом как лучший иногородний участник олимпиады.

<u>II группа</u>

Участник	вуз	кол-во баллов	место в группе	диплом
Викулаев П.С.	СПГУ(Э)	23	1	1 ст.
Горохова Е. А.	СПГУ(Э)	20	2-3	2 ст.
Фадеев Е.С.	СПГУ(Э)	20	2-3	2ст.
Бодалев И. С.	ГТИ(ТУ)	13,5	4	3 ст.
Санников А.М.	ВКА	12	5	3 ст.
Демидов И.В.	ГТИ(ТУ)	10	6	3 ст.

<u>III группа</u>

Участник	вуз	кол-во баллов	место в группе	диплом
Шаргалин А.Ю.	СЗТУ	13	1	1 ст.
Силин П.И.	РГГМИ	12,5	2	1 ст.
Савостин С.С..	ГМА	12	3	1 ст.
Грибанов А.В.	СПГУСЭ	9,5	4	3 ст.

Задачи 2-го тура олимпиады
21 ноября 2010 года

1. Пусть $f: R \to R$ - непрерывная функция. Допустим, что для любого $c > 0$ график f может быть преобразован в график cf с использованием только сдвигов и поворотов. Следует ли отсюда, что $f(x) = ax + b$ с некоторыми $a, b \in R$? (6 баллов)

2. Пусть A - непустое замкнутое ограниченное подмножество вещественной оси и $f: A \to A$ - неубывающая непрерывная функция. Доказать, что существует точка $p \in A$ такая, что $f(p) = p$. (6 баллов)

3. В окружность единичного радиуса вписан правильный $N-$угольник. Найти произведение длин всех его диагоналей, проведенных из одной вершины (считая прилегающие стороны). (6 баллов)

4. Пусть $n > 1$, $n-$ нечетное,

$$A = \{a_{ij}\}_{i,j=1,\dots n}, \ a_{ij} = \begin{cases} 2, & i = j; \\ 1, & i - j \equiv \pm 2 (\operatorname{mod} n); \\ 0, & otherwise. \end{cases} \qquad \det A = ? \ \text{(8 баллов)}$$

5. Вещественная функция $f(x)$ для любого $x \in R$ удовлетворяет уравнению

$$f'' - 2f' + f = 2e^x.$$

Показать, верны ли следующие утверждения:

a) Если $f(x) > 0$ для любого $x \in R$, то $f'(x) > 0$ для любого $x \in R$;

b) Если $f'(x) > 0$ для любого $x \in R$, то $f(x) > 0$ для любого $x \in R$. (8 баллов)

6. X - квадратная матрица порядка n. Рассмотрим ее определитель как функцию n^2 переменных x_{ij} $(i, j = 1, \dots, n)$ элементов матрицы.

a) Пусть $y_{ji}(x) = \dfrac{\partial}{\partial x_{ij}} \det \mathrm{X}$, $\mathrm{Y} = \left(y_{ij}\right)_{i,j=1,\dots,n}$. Найти произведение XY.

b) Вычислить повторный интеграл по всем переменным

$$\int_0^1 dx_{11} \int_0^1 dx_{12} \dots \int_0^1 dx_{21} \int_0^1 dx_{22} \dots \int_0^1 \det \mathrm{X} dx_{nn} \ . \text{ (8 баллов)}$$

7. Вещества *A*, *B*, *C* в организме человека распадаются, причем скорость распада пропорциональна массе вещества.

a) Период полураспада вещества *A* равен двум часам. Лекарство должно приниматься как можно реже. Как часто и в каких количествах следует его принимать, если присутствие более m граммов *A* опасно, а менее $m/4$ граммов – неэффективно?

b) Лекарство *B* с периодом полураспада 12 часов безвредно, но при его распаде образуется вещество *C* с периодом полураспада 24 часа, присутствие которого в организме опасно в количестве более *M* граммов. Скорость образования вещества *C* равна половине скорости распада *B*. Какова максимальная доза *B*, которую можно принять один раз?

c) Какова максимальная доза *B*, которую можно принимать постоянно, один раз в сутки в одно и то же время? (10 баллов)

8. Для каждого натурального k найти наименьшее число n_k, для которого существуют $n_k \times n_k$ матрицы $A_1, A_2, \ldots, A_k$, такие, что все следующие условия выполнены:
1) $A_1^2 = A_2^2 = \ldots = A_k^2 = 0$; 2) $A_j A_i = A_i A_j$ для всех $1 \le i, j \le k$; 3) $A_1 A_2 \ldots A_k \ne 0$. (10 баллов)

Количество участников, решивших задачи (определено по формуле: полная сумма набранных всеми участниками баллов за задачу, деленная на стоимость задачи).

№ задачи	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Кол-во решивших	3	2	,3	1,6	5	5,7	4,5	0,3

Решения задач 2-го тура

1. Нет. Функция $f(x) = e^x$ также обладает данным свойством, так как $ce^x = e^{x+\log c}$.

2. Будем проводить доказательство от противного. Пусть $f(x) \ne x$ для любого $x \in A$. Пусть $[a,b]$ наименьший замкнутый интервал, содержащий множество A. Так как A замкнуто, то $a, b \in A$. Из того, что $f: A \to A$ и $f(x) \ne x$, следует $f(a) > a$ и $f(b) < b$.
Пусть $p = \sup\{x \in A: f(x) > x\}$. Так как A замкнуто и f непрерывна, то $f(p) \ge p$, значит $f(p) > p$. Для всех $x > p, x \in A$ имеем $f(x) < x$ (по определению p); $f(p) > p$, значит $f(f(p)) < f(p)$, но это противоречит тому, что f неубывающая функция.

3. Корни N-ой степени из единицы $z_1, z_2, \ldots, z_N$, изображенные на комплексной плоскости, образуют вершины правильного N-угольника, вписанного в единичную окружность с центром в точке $z = 0$. Поэтому искомое произведение длин диагоналей равно $\left|\prod_{k=2}^{N}(1 - z_k)\right|$, где $z_1 = 1$, но $\prod_{k=1}^{N}(z - z_k) = z^N - 1$. При $z \ne 1$ справедливо

$$\prod_{k=2}^{N}(z - z_k) = \frac{z^N - 1}{z - 1} = 1 + z + z^2 + \ldots + z^{N-1} \quad (*)$$

В силу непрерывности функции $\prod_{k=2}^{N}(z - z_k)$ по z представление (*) верно и при $z = 1$.
Таким образом

$$\left|\prod_{k=2}^{N}(1 - z_k)\right| = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{N} = N.$$

4. Введём в рассмотрение матрицу B, такую что $A = B^2$. Тогда матрица B имеет следующие элементы

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & i - j = \pm 1 (\operatorname{mod} n) \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

Найдем $\det B$. Разложим $\det B$ по первой строке, и затем оба слагаемых разложим по первому столбцу.

$$\det B = \begin{vmatrix} 0 & 1 & & & & 1 \\ 1 & 0 & 1 & & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & 0 & 1 & \\ & & & 1 & 0 & 1 \\ 1 & & & & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & 0 & 1 & \\ & & & 1 & 0 & 1 \\ 1 & & & & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & & & \\ & 1 & 0 & 1 & & \\ & & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 0 & 1 \\ & & & & 1 & 0 \\ 1 & & & & & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -\left(\begin{vmatrix} 0 & 1 & & & & \\ 1 & 0 & 1 & & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & 0 & 1 & \\ & & & 1 & 0 & 1 \\ & & & & 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & & & & & \\ 0 & 1 & & & & \\ 1 & \ddots & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & 0 & 1 & \\ & & & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right) + \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 0 & 1 \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & & & & \\ 1 & 0 & 1 & & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & 0 & 1 & \\ & & & 1 & 0 & 1 \\ & & & & 1 & 0 \end{vmatrix} \right)$$

Так как вторая и третья матрицы в правой части треугольные, то их определители равны произведению элементов на главной диагонали. Так как первая и четвертая матрицы обладают свойством $row_1 - row_3 + row_5 - ... \pm row_{n-2} = 0$, то их определители равны нулю. Таким образом

$$\det B = -(0-1) + (1-0) = 2 \Rightarrow \det A = 4.$$

5. Общее решение дифференциального уравнения имеет вид: $f(x) = (x^2 + bx + c)e^x$. Тогда $f'(x) = (x^2 + (b+2)x + (b+c))e^x$.

$$f(x) > 0, \forall x \in R \Leftrightarrow x^2 + bx + c > 0, \forall x \in R \Leftrightarrow b^2 - 4c < 0,$$

$$f'(x) > 0, \forall x \in R \Leftrightarrow x^2 + (b+2)x + (b+c) > 0, \forall x \in R \Leftrightarrow b^2 - 4c + 4 < 0$$

Из условия $b^2 - 4c < 0$ не следует $b^2 - 4c + 4 < 0$. Таким образом, утверждение (а) не верно. Но из условия $b^2 - 4c + 4 < 0$ следует $b^2 - 4c < 0$. Таким образом, утверждение (б) верно.

6. а) Заметим, что $\dfrac{\partial}{\partial x_{ij}} \det X = y_{ji} -$ алгебраическое дополнение элемента x_{ij}. Поэтому по свойству алгебраических дополнений

$$\sum_{k=1}^{n} x_{ik} y_{kj} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \det X, & i = j \end{cases}$$

То есть $XY = (\det X)E,$ где $E -$ единичная матрица.

б) Последовательным интегрированием получаем

$$\int_0^1 dx_{11} \int_0^1 dx_{12} ... \int_0^1 \det X dx_{nn} = \det\left(\int_0^1 x_{ij} dx_{ij} \right) = \det(a_{ij}),$$

где $a_{ij} = 1/2,\ i, j = 1, ...n.$ Следовательно, $\det(a_{ij}) = 0.$

7. а) В данный момент времени в организме не может находиться более m граммов А, через 4 часа его станет $m/4$. Значит, промежутки времени между приемами не могут превышать четырех часов. Если принять в первый раз m граммов, а затем по $3m/4$ граммов через каждые 4 часа, то условия задачи будут выполнены.

б) Пусть $x(t), y(t)$ - массы веществ В и С соответственно, присутствующие в организме через время t после приема лекарства В. Тогда

$$\begin{cases} x' = -\dfrac{\ln 2}{12}x, \\ y' = -\dfrac{\ln 2}{24}y - \dfrac{1}{2}x' = -\dfrac{\ln 2}{24}(x-y), \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} x(t) = 2^{-\frac{t}{12}}x_0, \\ y(t) = 2^{-\frac{t}{24}}(x_0+y_0) - 2^{-\frac{t}{12}}x_0. \end{cases} \qquad (1)$$

Стандартное исследование $y(t)$ на экстремум показывает, что $y(t)$ достигает максимума при $t = t_0$, где t_0 определяется из уравнения

$$2^{-\frac{t_0}{24}} = \frac{x_0+y_0}{2x_0}. \qquad (2)$$

Следовательно,

$$\max_t y(t) = (x_0+y_0)\frac{x_0+y_0}{2x_0} - x_0\left(\frac{x_0+y_0}{2x_0}\right)^2 = \frac{(x_0+y_0)^2}{4x_0}. \quad (3)$$

По условиям задачи y_0 и $\max\limits_t y(t) \le M$, откуда $x_0 \le 4M$. Ответ: 4М г.

в) Пусть принимается постоянно по r граммов В. Обозначим через x_n, y_n массы веществ В и С, соответственно. Сразу после $n-$го приема. Тогда x_{n+1}, y_{n+1} можно найти, подставляя в (1) $t = 24,\ x_n, y_n$ в качестве начальных данных и добавляя r к массе вещества В:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{1}{4}x_n + r, \\ y_{n+1} = \dfrac{x_n+y_n}{2} - \dfrac{1}{4}x_n = \dfrac{1}{2}y_n + \dfrac{1}{4}x_n, \end{cases}$$

Так как $x_1 = r$, то $x_2 = \frac{1}{4}r + r,\ x_3 = \frac{1}{16}r + \frac{1}{4}r + r,$ и т.д. С помощью метода математической индукции нетрудно доказать, что $x_n = \frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)r,$ откуда (таким же способом) $x_n + y_n = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)r$. Найдем наибольшее значение $y(t)$ между $n-$м и $(n+1)-$м приемами лекарства. Из найденных выражений для x_n и $x_n + y_n$ следует, что $x_n + y_n \le 2x_n,\ n \ge 1.$

$$\mu_n = \frac{(x_n + y_n)^2}{4x_n} = \frac{3}{4}\frac{(2^n - 1)^2}{4^n - 1}r = \frac{3}{4}\left(1 - \frac{2}{2^n + 1}\right)r$$

(использовались найденные выражения для x_n и $x_n + y_n$). Для всех n должны быть выполнены неравенства $\mu_n \le M$. Это возможно тогда и только тогда, когда $r \le \frac{4}{3}M$.

Ответ: $\frac{4}{3}M$.

8. Ответ: $n_k = 2^k$. В этом случае матрицы можно построить следующим образом. Пусть V - n_k -мерное вещественное векторное пространство с базисом $\{S\}$, где S пробегает все 2^k подмножеств множества $\{1,2,...,k\}$. Определим A_i, как отображение из V в V по правилу

$$A_i[S] = \begin{cases} 0, & i \in S \\ [S \cup \{i\}], & i \notin S \end{cases},$$

для всех $i = 1,2,...,k$ и $S \subset \{1,2,...,k\}$. Тогда $A_i^2 = 0$ и $A_i A_j = A_j A_i$. Более того $A_1 A_2 ... A_k[\varnothing] = [\{1,2,..,k\}]$ и, значит, $A_1 A_2 ... A_k \ne 0$.

Теперь пусть $A_1, A_2, ..., A_k$ матрицы $n \times n$, удовлетворяющие условиям задачи. Докажем, что $n \ge 2^k$. Пусть v - вещественный вектор такой, что $A_1 A_2 ... A_k v \ne 0$. Обозначим через P множество всех подмножеств $\{1,2,...,k\}$. Упорядочим P следующим образом.

$$X \prec Y \Leftrightarrow |X| \le |Y| \text{ для любых } X, Y \in P$$

Для каждого $X = \{x_1, x_2, ..., x_r\} \in P$ определим: $A_X = A_{x_1} A_{x_2} ... A_{x_r}$ и $v_X = A_X v$. Обозначим $\overline{X} = \{1,2,...,k\} \setminus X$. Возьмём $X, Y \in P$ такие, что $X \prec Y$ и $X \ne Y$. Тогда $A_{\overline{X}}$ аннулирует v_Y, так как существует, по крайней мере, один $y \in Y \setminus X = Y \cap \overline{X}$ и $A_{\overline{X}} v_Y = A_{\overline{X}} A_y A_y v_{Y \setminus \{y\}} = 0$ ($A_y^2 = 0$). Следовательно, $A_{\overline{X}}$ аннулирует линейную оболочку всех v_Y с $X \prec Y$ и $X \ne Y$. Откуда имеем, что v_X не лежит в этой линейной оболочке в связи с тем, что $A_{\overline{X}} v_X = v_{\{1,2,...,k\}} \ne 0$. Поэтому векторы v_X с $X \in P$ линейно не зависимы. Значит $n \ge |P| = 2^k$.

Ранжированный список участников
2-го тура студенческой олимпиады Санкт-Петербурга
по математике 2010-11 учебного года.

ФИО	ВУЗ	ВЕС задачи (макс. колличество баллов) / номер задачи								Кол-во баллов	Место
		6	6	6	8	8	8	10	10		
		1	2	3	4	5	6	7	8		
Банных Антон Геннадьевич	ИТМО	6	6	2	8	8	8	4	0	42	1
Мостовых Павел Сергеевич	БГТУ	6	1	2	2	8	8	10	3	40	2
Порецкий Александр Сергеевич	СПбГУ Ф	6	2	2	0	7	8	10	0	35	3
Басков Олег Владимирович	СПбГУ ПМПУ		1	2	1	8	8	10	0	30	4
Давыдов Андрей Анатольевич	ИТМО		1	6		8	8	2	0	25	5
Буздалов Максим Викторович	ИТМО			6	2		6	10	0	24	6