II ДИСТАНЦИОННЫЙ МЕЖВУЗОВСКИЙ КОНКУРС

«Решение нестандартных задач

математического и естественнонаучного цикла»

(математика)

27 октября 2021 года

**Задания индивидуального зачета**

1. Найти  если  .

 *Решение.*









Таким образом: 

 

 

2021=2+673⋅3 , значит 







Ответ:

1. Вычислить определитель матрицы А порядка 2021, элементы которой заданы условиями , , 

 *Решение*.

 Вычтем первую строку из каждой строки со 2-ой по 2021-ю. Последовательными перестановками -й строки с (+1) для  = 1, … , 2020, приведем матрицу к нижнетреугольному виду, где по главной диагонали стоят числа 1, 1, …, 1, 2021. Следовательно, определитель матрицы равен
(-1)20202021 = 2021.

Ответ: 2021.

1. Найти  +  для 

 *Решение*.

 Запишем степенной ряд геометрической прогрессии с суммой , подставим  и домножим на *x*, получаем разложение *f* (*х*) в ряд Маклорена при 



Сопоставив коэффициенты при 2021 и 2022 степенях, получаем



.

Ответ: 

1. Вычислить интеграл , если  выполнено .

*Решение.*





 

Обозначим . Тогда







Ответ: 0 при четных *n,* 2021π при нечетных *n*

1. Определить значения , , если комплексная переменная *z* удовлетворяет уравнению .

*Решение.*

Множество точек, удовлетворяющих условию  находится на окружности радиусом 1 с центром в точке (0 ; 2i).

1). Найдем множество значений модуля . Модуль  равен расстоянию от точек на окружности  до точки 1+i.



Минимальное значение  принимает в точке z1 и максимальна в точке z2.

Найдем расстояние от z до z1:



Найдем расстояние от z до z2:



принимает значение от  до 

2). Найдем множество значений аргумента.

Минимальное значение в точке z3 равно , максимальное в точке z4 равно .

(нужно понимать, что углы отличаются от положительно направленной оси Ox против часовой стрелки)



Ответ: ,

1. Решить задачу Коши



*Решение.*

Заменой  уравнение приводится к виду .

Отсюда: 

Подставляя начальные условия, получаем 

Ответ: 

1. Плоскость пересекает боковые ребра правильной пирамиды ТABCD в точках , , , . , , , . Найти длину бокового ребра пирамиды ТABCD.

*Решение.*

Будем использовать базис из векторов 

и примем длину бокового ребра за *x*+5. Тогда:.

Расположение точек A1,B1,C1,D1 в одной плоскости равносильно компланарности векторов:



Поскольку некомпланарны, то должна быть вырожденной матрица перехода от базиса {} к векторам 

.

По условию задачи боковое ребро , так что подходит только второй корень.

Ответ: длина бокового ребра 20.

1. Журавль и Лиса решили пострелять в тире. Силы спортсменов равны в том смысле, что математическое ожидание числа попаданий при трех выстрелах у Журавля и Лисы одинаково. Известно также, что вероятность попадания при первом выстреле у Журавля и Лисы одинакова и равна *p.* Далее вне зависимости от предыдущего результата уравновешенный Журавль попадает в мишень с вероятностью *p,* ау впечатлительной Лисы в случае успеха вероятность попадания при следующем выстреле возрастает на h, а в случае неудачи снижается на h. Каково значение *р*?

*Решение.*

Для Журавля 

Рассмотрим возможные серии для Лисы (1 - попадание, 0 - промах):

,

,

,

,

,

,

,

.



Отсюда следует, что 

Из условия  получим 

Ответ: *p*=1/2.

II ДИСТАНЦИОННЫЙ МЕЖВУЗОВСКИЙ КОНКУРС

 «Решение нестандартных задач

 математического и естественнонаучного цикла»

(математика)

27 октября 2021 года

**Задания командного зачета**

1. Найти все решения уравнения



на отрезке [0; 1].

*Решение.*

Обозначим левую часть *f*(x), правую *g*(x). Два корня угадываются :





Осталось проверить, что нет других корней. Проведем исследование функции на выпуклость:

  

  

График функции выпуклый вниз на отрезке[0;1] и значит, находится под осью абсцисс и кроме *х* =0, *х* =1 нулей y(x) нет.

Ответ: 0, 1

1. Дана рекуррентная последовательность:

 , .

Показать, что при *у* = 21



*Реше*$н$*ие:*

Покажем, что при $n\geq 2$ $ a\_{n}\geq \sqrt{2n}$

1. *n=2* $ a\_{2}=2\geq \sqrt{2∙2}$ *–* верно
2. Пусть $ a\_{k}\geq \sqrt{2k}$

Так как функция  возрастающая, то



Функция определена, непрерывна и дифференцируема на (2; +). Тогда из теоремы Лагранжа следует

 , где , т.е.



По принципу математической индукции при $n\geq 2$ $ a\_{n}\geq \sqrt{2n}$

Тогда



**Турнирная таблица для заполнения**

Команда по математике ВУЗ номер команды

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | ФИО | курс | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | сумма | С КЗ |
| 1 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 2 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 3 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 4 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 5 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| сумма |  |  |
| среднее |  |  |
| итог с заданием командного зачета |  |  |

Задания командного зачета - №9 - *x* баллов, №10 -*y* баллов = **x+y** баллов

Образец турнирной таблицы

Команда по математике ВУЗ номер команды

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | ФИО | курс | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | сумма | С КЗ |
| 1 | Алексеев М.А. | 2 | 7 | 10 | 10 | 5 | 10 | 0 | 10 | 10 | **68** | **78** |
| 2 | Петров А. В | 3 | 7 | 10 | 10 | 5 | 10 | 10 | 10 | 0 | **62** | **72** |
| 3 | Семенов А. Д. | 3 | 7 | 0 | 10 | 5 | 10 | 10 | 10 | 10 | **62** | **72** |
| 4 | Никитин С. А. | 2 | 7 | 0 | 2 | 5 | 8 | 0 | 10 | 10 | **42** | **52** |
| 5 | Иванов М. А. | 4 | 7 | 0 | 0 | 0 | 10 | 0 | 10 | 10 | **37** | **47** |
| сумма | **271** |  |
| среднее | **54** |  |
| итог с заданием командного зачета | **64** |  |

Задания командного зачета - №9 - **8** баллов, №10 -**2** балла =**10** баллов

Каждая задача имеет максимальную оценку 10 баллов

Баллы распределяются по решению жюри на местах. Общие рекомендации - за идею решения, которая могла бы привести к успешному решению задачи, но не была реализована 2 б, за получение в результате идеологически верного решения неправдоподобного ответа (например, вероятность больше 1) не более 3 баллов за задачу. За грубые ошибки снимается не менее 4 баллов

Частные рекомендации (принимаются при решениии конкурсанта близком к решению Организатора).

Задача 1.

Верно вычислены первые члены соотношения, констатирована периодичность – 6 б

Верно выбрана формула для расчетов – 8 б

Выполнены вычисления – 10 б

Задача 2

Конкурсант представляет определитель, подлежащий вычислению – 4 б

Выполнено преобразование определителя к треугольному виду – 8 б

Вычислен определитель – 10 б

Задача 3

Записано общее разложение функции в ряд Маклорена – 2 б

Получено разложение функции в степенной ряд с использованием суммы геометрической прогрессии - 6 б

Произведено сравнение коэффициентов степенных рядов и получен верный ответ – 10 б

Задача 4

Интеграл разбит на сумму двух интегралов – 2 б

Получен - 4б

Обнаружена периодичность значений интеграла – 8 б

Вычислены интегралы – 10 б

Задача 5

Дана геометрическая интерпретация постановки вопроса – 2 б

Найден диапазон изменения модуля (или аргумента) - 6 б

Задача решена полностью – 10 б

Задача 6

Предложена и реализована замена переменной 4 б

Получено решение ЛОДУ – 7

Задача решена полностью – 10 б

Задача 7

Введен неортогональный базис – 2 б

Рассмотрен вопрос о принадлежности точек одной плоскости – 4 б

Расписано условие компланарности векторов - 8 б

Найдена длина ребра – 10 б

Задача 8

Определено математическое ожидание числа попаданий при трех выстрелах у Журавля – 1 б

Определены вероятности комбинаций попадание/промах для Лисы – 6 б

Определено математическое ожидание числа попаданий при трех выстрелах у Лисы – 9 б

Найдена p – 10 б

 Задания командного зачета

Задача 1

Угаданы корни уравнения и осуществлена проверка – 5 б

Доказано, что иных корней не существует – 10 б

Задача 2

Зафиксировано неравенство для доказательства - 2 б

Проведено доказательство неравенства по методу математической индукции – 8 б

Продемонстрирован ответ на вопрос задачи - 10 б