



**Тематическая олимпиада по высшей математике
для студентов и курсантов инженерных и экономических
специальностей
ТОВМИС «Базис»
24 ноября 2020 года**

1. Пантелей безмятежно работал в цирке укротителем бобров, до того страшного момента, пока бобры не попросили его доказать, что если даны квадратные матрицы одного порядка такие, что $AB = A + B$, то

$$|A - E| \cdot |B - E| = 1,$$

где E – единичная матрица того же порядка.

Помогите Пантелею сохранить свой авторитет в глазах строптивых и опасных бобров.

2. Чтобы получить зачет Матильда должна вычислить $(\vec{d}, \vec{f}, \vec{g})$, где
 $\vec{d} = 2020\vec{a} - 2021\vec{b}$, $\vec{f} = 2021\vec{b} - 2022\vec{c}$, $\vec{g} = 2022\vec{c} - 2020\vec{a}$.

Не дайте красавице Матильде «вылететь» из любимого вуза.

3. Помогите художнику Корнею изобразить область комплексной плоскости, заданную условием

$$\frac{1}{4} < \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\bar{z}} \right) + \operatorname{Im} \left(\frac{1}{\bar{z}} \right) < \frac{1}{2}.$$

4. Еремей с великим ужасом обнаружил внутри треугольника ABC коварную точку O такую, что $\overline{OA} + \overline{OB} + \gamma \overline{OC} = 0$, где γ – отношение площадей треугольников AOC и ABC . Верните Еремею душевное равновесие и найдите γ .

5. Просто решите задачу. Точки $A(-4, -1, 2)$ и $B(2, 5, -16)$ – вершины треугольника ABC . Середина стороны AC лежит на прямой $l: \frac{x}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z-1}{3}$, а середина стороны BC принадлежит плоскости $\alpha: 3x - 4y + z + 2 = 0$. Найти площадь треугольника ABC .

6. После мучительных поисков Корней и Матвей доказали, что если $ab + bc + ac = 0$, то

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}^2 = (a^2 + b^2 + c^2)^3.$$

Повторите их «подвиг».

Корней, Матвей, Пантелей, примкнувший к ним Еремей и красавица Матильда благодарят Вас за помощь в решении их проблем и приглашают к новой встрече на ежегодной олимпиаде ТОВМИС «Шанс» по теории вероятностей в апреле 2021 года.