МЕЖВУЗОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА
(6 декабря 2018г.)

1. Решить систему уравнений:

$$x_1 + 2x_2 + \cdots + 9x_9 + 10x_{10} = 55,$$
$$x_2 + 2x_3 + \cdots + 9x_{10} + 10x_1 = 55,$$
$$\cdots$$
$$x_{10} + 2x_1 + \cdots + 9x_8 + 10x_9 = 55.$$

Решение. Складывая все уравнения системы, получим

$$(1+2+\cdots+10)(x_1 + x_2 + \cdots + x_9 + x_{10}) = 10\cdot 55,$$

тогда

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_9 + x_{10}) = 10 \quad (1).$$

Вычтем из второго уравнения системы первое, получим

$$9x_1 - x_2 - x_3 - \cdots - x_{10} = 0 \quad (2).$$

Сложив равенства (1) и (2), найдем $x_1 = 1$.

Аналогично находим остальные неизвестные. Таким образом, $x_1 = x_2 = \cdots = x_9 = x_{10} = 1$.

2. Решить уравнение:

$$\left[\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & 2 & x \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{x}{x^2-1} & 0 & \frac{x-2}{x^2-1} & -\frac{1}{x+1} \\ \frac{x^2-2}{x^2-1} & -1 & \frac{2x-x^2}{x^2-1} & \frac{x}{x+1} \\ -\frac{x^2-2}{x^2-1} & 1 & -\frac{2x-1}{x^2-1} & \frac{1}{x+1} \\ \frac{-1}{x^2-1} & 0 & \frac{2x-1}{x^2-1} & -\frac{x-1}{x^2-1} \end{vmatrix}\right]^{\begin{vmatrix} x & 2018 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}} = 1.$$

Решение. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & 2 & x \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2-1} & 0 & \frac{x-2}{x^2-1} & -\frac{1}{x+1} \\ \frac{x^2-2}{x^2-1} & -1 & \frac{2x-x^2}{x^2-1} & \frac{x}{x+1} \\ -\frac{x^2-2}{x^2-1} & 1 & -\frac{2x-1}{x^2-1} & \frac{1}{x+1} \\ \frac{-1}{x^2-1} & 0 & \frac{2x-1}{x^2-1} & -\frac{x-1}{x^2-1} \end{pmatrix}.$$

Тогда можно убедиться, что $AB=E$. Определитель единичной матрицы равен 1. Следовательно можно заключить, что исходное уравнение имеет множество решений, кроме 1 и -1.

3. Решить уравнение

$$|2z - 1| = 4i\bar{z}.$$

Решение. Пусть $z = x + iy$. Тогда уравнение можно записать в виде:

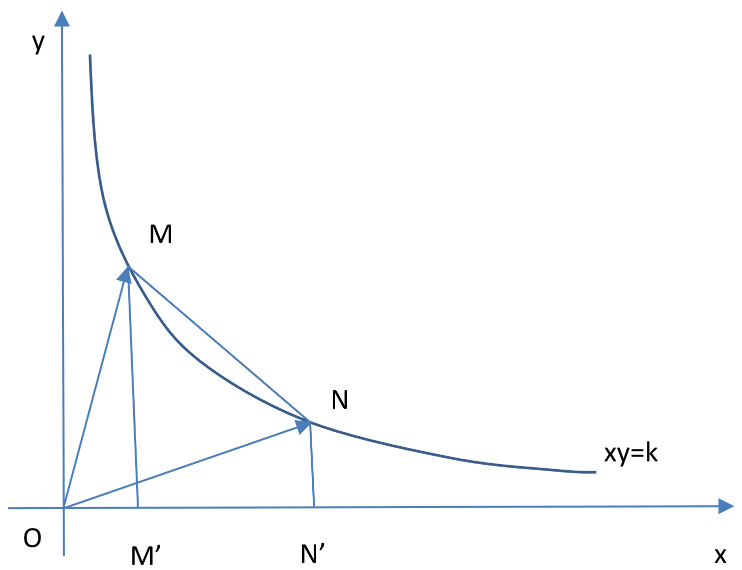
$$|(2x-1)+2iy| = 4ix + 4y.$$
Откуда
$$\begin{cases} x = 0, \\ y \geq 0, \\ \sqrt{1+4y^2} = 4y. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}. \end{cases}$$
$z = \frac{1}{2\sqrt{3}} i.$

4. Доказать, что координаты (x, y) всех точек линии $x^2+y^2+2y-7=0$ удовлетворяют неравенству:
$$\begin{vmatrix} x & y+1 & 1 \\ 1 & x & y+1 \\ y+1 & 1 & x \end{vmatrix} \leq 27.$$
При каком условии достигается равенство?

Решение. Заданная линия – окружность $x^2+(y+1)^2=8$.
Определим векторы: $\bar{a} = (x;\ y+1;\ 1)$, $\bar{b} = (1;\ x;\ y+1)$, $\bar{c} = (y+1; 1; x)$.
Тогда
$$\begin{vmatrix} x & y+1 & 1 \\ 1 & x & y+1 \\ y+1 & 1 & x \end{vmatrix} = \bar{a}\bar{b}\bar{c} = \bar{a}\cdot\left(\bar{b}\times\bar{c}\right) = |\bar{a}|\left|\bar{b}\times\bar{c}\right|\cos\left(\bar{a},\widehat{\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)}\right) \leq |\bar{a}|\left|\bar{b}\times\bar{c}\right| =$$
$$|\bar{a}|\left|\bar{b}\right||\bar{c}|\sin\left(\widehat{\bar{b},\bar{c}}\right) \leq |\bar{a}|\left|\bar{b}\right||\bar{c}| = \left(\sqrt{x^2+(y+1)^2+1}\right)^3 = 9^{\frac{3}{2}} = 27.$$
Равенство достигается, если $\bar{a} \perp \bar{b} \perp \bar{c}$, то есть $x + x(y+1) + (y+1) = 0$.
Откуда, $x = -\frac{y+1}{y+2}$.

5. Точки M и N лежат на линии $xy = k$, $x > 0$. Точки M’ и N’ – их проекции на ось абсцисс. Доказать, что площадь треугольника OMN равна площади трапеции MNN’M’.

Решение.



Пусть $k > 0$, $x_1 < x_2$.
$M\left(x_1; \frac{k}{x_1}\right)$, $N\left(x_2; \frac{k}{x_2}\right)$, $M'(x_1; 0)$, $N'(x_2; 0)$.

Площадь трапеции MNN'M':

$$S_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{k}{x_1} + \frac{k}{x_2}\right)(x_2 - x_1) = \frac{k}{2}\frac{x_2^2 - x_1^2}{x_1 x_2}.$$

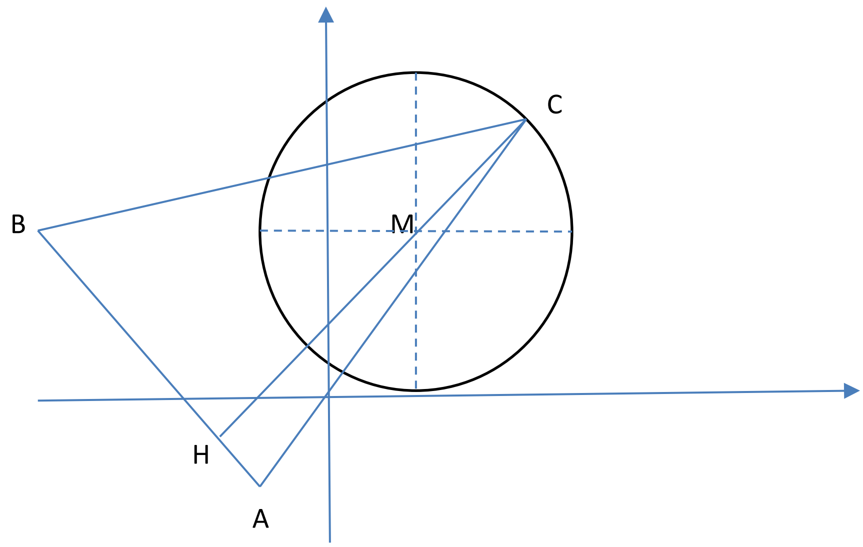
Площадь треугольника OMN:

$$S_2 = \frac{1}{2}|\overline{OM} \times \overline{ON}| = \frac{1}{2} mod \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ x_1 & \frac{k}{x_1} & 0 \\ x_2 & \frac{k}{x_2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{kx_1}{x_2} - \frac{kx_2}{x_1}\right)^2} = \frac{k}{2}\left|\frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 x_2}\right| = \frac{k}{2}\frac{x_2^2 - x_1^2}{x_1 x_2}.$$

При $k < 0$, в силу симметрии, получаем тот же результат.

6. На плоскости заданы точки A(-1; -1) и B(-4; 3). Точка C лежит на кривой $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 1 = 0$. Какое наибольшее значение может иметь площадь треугольника ABC?

Решение.



Уравнение кривой приводится к виду $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 9$. Имеем окружность с центром в точке M(1; 3), радиуса R=3.

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CH$ ($CH -$ высота треугольника). Точки A и B зафиксированы, следовательно, S_{ABC} будет наибольшей, если CH – наибольшая. Для этого CH должна проходить через центр окружности M.

$CH = CM + MH$, $CM = R = 3$, $MH = d(M, AB)$.

Уравнение прямой AB имеет вид: $4x + 3y + 7 = 0$.

$MH = d(M, AB) = \frac{|4 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 7|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 4$.

Имеем: $CH = 7$, $AB = 5$.

$S_{max} = \frac{35}{2}$.