

# РАСЧЁТ ПОГРЕШНОСТИ ПРЯМЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

## 1.1. Описание работы

Цель работы – освоение общепринятой методики расчёта погрешности прямых измерений.

Содержание работы. Каждый студент получает от преподавателя индивидуальный вариант с результатами измерений. Проверяет выборку на наличие промахов. Производит оценку случайной погрешности, а затем – систематической погрешности. Рассчитывает суммарную погрешность прямых измерений.

## 1.2. Основные понятия

*Измерение* – это процесс, заключающийся в сравнении путём физического эксперимента данной физической величины с некоторым её значением, принятым за единицу измерения.

В результате измерения получают числовое значение физической величины:

$$q = \frac{Q}{[Q]},$$

где  $q$  – числовое значение физической величины;

$Q$  – значение физической величины;

$[Q]$  – единица величины.

Измерения невозможно провести точно, результат измерения всегда содержит ошибку (погрешность). Погрешность измерения  $\Delta$ :

$$\Delta = x - q,$$

где  $x$  – результат измерения;

$q$  – истинное (действительное) значение измеряемой величины.

*Истинное значение* – это значение, характеризующее идеальным образом в качественном и количественном отношении измеряемую величину. Цель измерений – определение истинного значения величины. Однако понятие «истинное значение» в гносеологическом смысле аналогично понятию «абсолютная истина». Иными словами, истинное значение величины существует, однако, найти его в принципе невозможно.

На практике вместо истинного значения используется *действительное значение величины*. Действительное значение физической величины – это значение, полученное экспериментальным путём и настолько близкое к истинному значению, что в поставленной измерительной задаче может быть использовано вместо него.

С погрешностью измерений тесно связаны понятия точности измерений и достоверности результатов измерений. Очевидно, что, чем меньше погрешность измерений, тем выше их точность, и наоборот. Точность измерений должна быть оптимальной: слишком высокая точность, т. е. выше оптимального значения, приводит к неоправданным финансовым затратам, а слишком низкая может оказаться препятствием для решения поставленной задачи. *Результаты измерений являются достоверными, если их точность достаточна для решения поставленной задачи.*

В зависимости от характера изменения в процессе измерения и в зависимости от способа учёта их вклада в суммарную погрешность все виды погрешностей делятся на три основных вида:

- *систематические погрешности;*
- *случайные погрешности;*
- *грубые погрешности.*

*Систематическая погрешность* – одна из составляющих погрешности результата измерения, имеющая постоянное значение или изменяющаяся по определённому закону при повторных измерениях одной и той же физической величины.

Систематические погрешности делятся на исключенияемые и неисключаемые.

*Систематические исключенияемые погрешности* – это погрешности, в отношении которых известны значение и знак, и которые могут быть нейтрализованы специальной методикой измерения (*методикой выполнения измерений*). К систематическим исключенияемым погрешностям относятся:

- погрешности установки нуля;
- инструментальные погрешности.

В этих случаях результат измерения может быть уточнён путём введения соответствующих поправок, равных погрешности по абсолютной величине и взятых с обратным знаком.

*Систематические неисключаемые* погрешности – систематические погрешности, в отношении которых известно лишь их предельное значение.

*Случайная погрешность* – погрешность, изменяющаяся случайным образом при повторных измерениях одной и той же величины. Случайные погрешности возникают под действием многочисленных случайных факторов, природа которых неизвестна, и учесть которые невозможно.

Грубая погрешность измерения – погрешность, характеризующаяся тем, что результат отдельного измерения резко отличается от остальных результатов измерений, выполненных в одних и тех же условиях. Результат, содержащий грубую погрешность, называется *промахом*. Причины промахов – ошибки оператора, неисправность измерительных приборов, резкое изменение условий проведения измерений. Промахи не принимают во внимание: их отбрасывают при оценке погрешности измерений.

*Прямые измерения* – это измерения, при которых искомое значение физической величины получают непосредственно. При прямых измерениях объект измерения приводят во взаимодействие со средством измерения и значение физической величины определяют по показаниям средства измерения.

К прямым измерениям относится измерение массы тела с помощью весов, измерение длины тела линейкой, измерение силы тока амперметром и др.

### **1.3. Классы точности средств измерений**

*Средства измерений* – специальные технические средства для выполнения измерений, имеющие нормированные метрологические характеристики, воспроизводящие и хранящие единицу физической величины, размер которой принимается неизменным в пределах установленной погрешности в течение известного интервала времени.

Классы точности средств измерений определяются предельной погрешностью средств измерений в их совокупности (основных и дополнительных погрешностей) и задаются маркировкой на средствах измерений (на шкале или на корпусе) и в нормативно-технической документации на средства измерения данного типа.

Иногда характеристика погрешности задается без обозначения класса точности.

Класс точности может задавать допускаемую погрешность:

1. *В абсолютном виде.* В этом случае класс точности обозначают условно, прописными буквами латинского алфавита (например, М, С) или цифрами для средств измерения. Смысл условных обозначений раскрывается в нормативно-технической документации, при этом меньшие пределы погрешности должны соответствовать буквам, находящимся ближе к началу алфавита, или меньшим цифрам. Примером могут служить классы точности концевых мер длины, обозначаемые условно порядковым номером: 0; 1; 2.

2. В виде *приведенной или относительной погрешности.*

В последнем случае для расчёта абсолютной погрешности необходимо знать нормирующее значение  $X_N$ , в качестве которого могут приниматься различные значения на отсчётном устройстве средства измерения или комбинации этих значений (табл. 1.1). В качестве пояснения выбираемых на отсчётном устройстве значений для расчёта  $X_N$  можно пользоваться рис. 1.1.

*Пример 1.* Вольтметр с пределами измерения по шкале 0...300 В; класс точности 0,5; показание при измерении равно 220 В.

Абсолютная погрешность согласно табл. 1.1 рассчитывается следующим образом:

$$\Delta_p = \pm \frac{\gamma}{100} X_N = \pm \frac{\gamma}{100} |X_B| = \pm \frac{0,5}{100} 300 = \pm 1,5 \text{ В.}$$

Следовательно, для результата измерения можно записать:  $U = 220 \pm 1,5 \text{ В}$  или  $U = 218,5 \dots 221,5 \text{ В}$ .

*Пример 2.* Амперметр с пределами измерения силы тока  $I$  по шкале от  $-5$  до  $20 \text{ А}$ ; класс точности 1,5; показание при измерении равно  $10 \text{ А}$ .

Абсолютная погрешность согласно табл. 1.1 рассчитывается следующим образом:

$$\Delta_p = \pm \frac{\gamma}{100} X_N = \pm \frac{1,5}{100} |X_B| = \pm \frac{1,5}{100} 20 = \pm 0,3 \text{ А.}$$

Для результата измерения получаем:  $I = 10 \pm 0,3 = 9,7 \dots 10,3 \text{ А}$ .

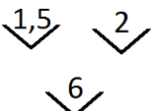
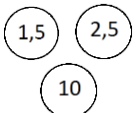
Пример 3. Для частотомеров класса точности 2, с диапазоном измерения от 45 до 55 Гц и номинальной частотой 50 Гц абсолютная погрешность измерения рассчитывается следующим образом:

$$\Delta_p = \pm \frac{\gamma}{100} X_N = \pm \frac{2}{100} 50 = \pm 1 \text{ Гц.}$$

При показании, например, 48 Гц для результата измерения можно записать  $f = 48 \pm 1 \text{ Гц} = 47 \dots 49 \text{ Гц}$ .

Таблица 1.1

Характеристики классов точности при обозначении допускаемой погрешности в виде приведённой или относительной погрешности<sup>1</sup>

| Задаваемая погрешность (размерность)                          | Примеры обозначения класса точности на приборе  | Нормирующее значение $X_N$                                 | Формула для определения абсолютной погрешности $\Delta_p$                                       |
|---|---|--|---|
| Приведённая $\gamma$ (%) <sup>2</sup>                         | Числом из ряда (1; 1,5; 2,5; 4; 5 и 6)·10 <sup>n</sup> , где $n = 1; 0; -1; -2$ и т. д. | Наибольшее из $ X_B $ и $ X_H $ или $X_{ном}$ <sup>3</sup> | $\Delta_p = \pm \frac{\gamma}{100} X_N$   |
| Приведенная $\gamma$ (%) с дополнительным знаком <sup>4</sup> |        | $X_B - X_H$  | $\Delta_p = \pm \frac{\gamma}{100} X_N$   |
| Относительная $\delta$ (%)                                    |       | Показание $X$ прибора при измерении                        | $\Delta_p = \pm \frac{\delta}{100} X_N$   |
| Приведённая (записанная в виде дроби)                         | 0,02/0,01   | $X$ и наибольшее из $ X_B $ и $ X_H $ <sup>5</sup>         | $\Delta_p = \left[ c + d \left( \left  \frac{X_k}{X} \right  - 1 \right) \right] \frac{X}{100}$ |

<sup>1</sup> Расшифровку значений  $X_B$ ,  $X_H$  и  $X$  см. рис. 1.1

<sup>2</sup> Для средств измерения с равномерной шкалой, степенной шкалой и для средств измерения с установленным номинальным значением.

<sup>3</sup> Для средств измерения с установленным номинальным значением)

<sup>4</sup> Для средств измерения физических величин с условным нулём.

<sup>5</sup>  $c$ ,  $d$  – числитель и знаменатель в обозначении класса точности,  $X_k$  – наибольшее значение из  $|X_B|$  и  $|X_H|$

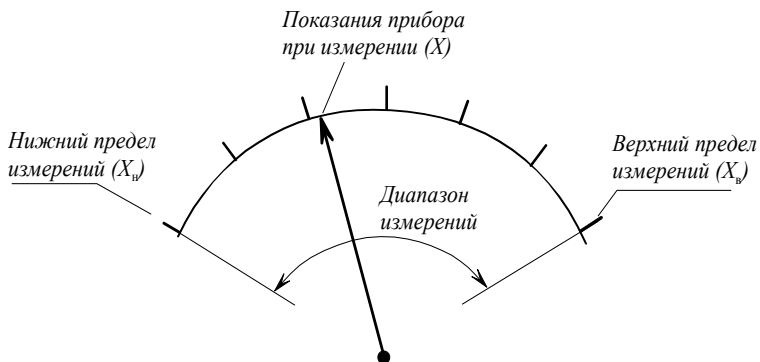


Рис. 1.1. Схема отсчётного устройства средства измерения

*Пример 4.* Для термоэлектрического термометра с классом точности  $\sqrt{1,5}$  с пределами измерения по шкале от 200 до 600 °С нормирующее значение  $X_N = 600 - 200 = 400$  °С. Значит, при регистрации температуры равной 350 °С, погрешность составит:

$$\Delta_p = \pm \frac{\gamma}{100} X_N = \pm \frac{1,5}{100} (X_v - X_n) = \pm \frac{1,5}{100} (600 - 200) = \pm 6 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

## 1.4. Оценка систематических погрешностей прямых измерений

При оценке систематических погрешностей основываются на двойственной природе систематических погрешностей: по отношению к конкретному экземпляру средства измерения данного типа эта погрешность является систематической, а по отношению к совокупности этих же средств измерения она является случайной с известным предельным значением. Следовательно, суммарная систематическая погрешность  $\Delta_{\text{сист}}$  — также случайная величина.

*Неисключённая систематическая погрешность* (НСП) — систематическая погрешность, в отношении которой известно лишь её предельное значение.

В качестве составляющих НСП могут быть приняты:

- погрешность метода;

- погрешность средства измерения;
- погрешности, вызванные другими источниками.

Пусть  $\theta_{\Sigma}$  – предел НСП  $\Delta_{\text{сист}}$ , а  $\theta_i$  – предел  $i$ -й составляющей  $\Delta_{\text{сист}i}$  НСП.

Если известно, что погрешности результата измерений определяются рядом составляющих НСП, каждая из которых имеет свои доверительные границы, то при неизвестных законах распределения, отдельных составляющих граница  $\theta_{\Sigma}$  неисключённой систематической погрешности определяется согласно *ГОСТ 8.736-2011 Измерения прямые многократные. Методы обработки результатов измерений. Основные положения* следующим образом:

при числе составляющих НСП  $m < 3$ :

$$\theta_{\Sigma} = \pm \sum_{i=1}^m |\theta_i|, \quad (1.1)$$

при числе составляющих НСП  $m \geq 3$ :

$$\theta_{\Sigma} = k \sqrt{\sum_{i=1}^m \theta_i^2}, \quad (1.2)$$

где  $\theta_i$  – граница (предел)  $i$ -й составляющей НСП;

$m$  – число составляющих НСП погрешностей результата измерений;

$k$  – коэффициент, значение которого зависит от доверительной вероятности:  $k = 1,1$  при доверительной вероятности  $P = 0,95$  и  $k = 1,4$  при доверительной вероятности  $P = 0,99$ .

## 1.5. Оценка случайных погрешностей прямых измерений

В качестве оценки истинного значения величины при многократных измерениях принимают среднее арифметическое (оценку математического ожидания):

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (1.3)$$

где  $\bar{x}$  – среднее значение результатов измерений;  $x_i$  – результат  $i$ -го измерения, причём  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Случайная погрешность  $\Delta_{\text{сл}}$  в определении истинного значения физической величины:

$$\Delta_{\text{сл}} = \bar{x} - q.$$

Предельное значение  $\varepsilon$  случайной погрешности вычисляют следующим образом:

$$\varepsilon = \pm t_{P,n} \cdot S_{\bar{x}}, \quad (1.4)$$

где  $t_{P,n}$  – коэффициент Стьюдента, зависящий от доверительной вероятности  $P$ , с которой оценивают погрешность и объема выборки (количества измерений)  $n$ ;

$S_{\bar{x}}$  – оценка среднего квадратического отклонения (СКО) среднего арифметического значения  $\bar{x}$ .

Значение коэффициента Стьюдента определяют по табл. 1.2, по значениям  $P$  и  $n$ .

Таблица 1.2

| $n$ | Коэффициенты Стьюдента        |     |     |      |
|-----|-------------------------------|-----|-----|------|
|     | Доверительная вероятность $P$ |     |     |      |
|     | 0,7                           | 0,8 | 0,9 | 0,95 |
| 2   | 2,0                           | 3,1 | 6,3 | 12,7 |
| 3   | 1,3                           | 1,9 | 2,9 | 4,3  |
| 4   | 1,3                           | 1,6 | 2,4 | 3,2  |
| 5   | 1,2                           | 1,5 | 2,1 | 2,8  |
| 6   | 1,2                           | 1,5 | 2,0 | 2,6  |
| 7   | 1,1                           | 1,4 | 1,9 | 2,4  |
| 8   | 1,1                           | 1,4 | 1,9 | 2,4  |
| 9   | 1,1                           | 1,4 | 1,9 | 2,3  |
| 10  | 1,1                           | 1,4 | 1,8 | 2,3  |
| 12  | 1,1                           | 1,4 | 1,8 | 2,2  |

Назначение доверительной вероятности определяется традициями, сложившиеся в той или иной области знаний.

Оценка СКО результатов отдельных измерений определяется по формуле:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}. \quad (1.5)$$

А оценку СКО среднего арифметического рассчитывают следующим образом:

$$S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}},$$



или с учётом (1.5):

$$S_{\bar{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}. \quad (1.6)$$

Очень важно понимать различие оценки  $S$  от  $S_{\bar{x}}$ . Оценка  $S$  определяет ширину полосы рассеяния всех результатов  $x_i$ , входящих в выборку, а оценка  $S_{\bar{x}}$  характеризует в  $\sqrt{n}$  раз более узкую ширину рассеяния самого среднего арифметического  $\bar{x}$  (рис. 1.2). То есть, если взять из генеральной совокупности результатов измерений несколько выборок и найти для каждой выборки среднее арифметическое, то полученные значения среднего арифметического сформируют свою полосу разброса шириной  $2\varepsilon$  в  $\sqrt{n}$  раз меньше, чем полоса разброса  $2\Delta_x$  отдельных измерений.

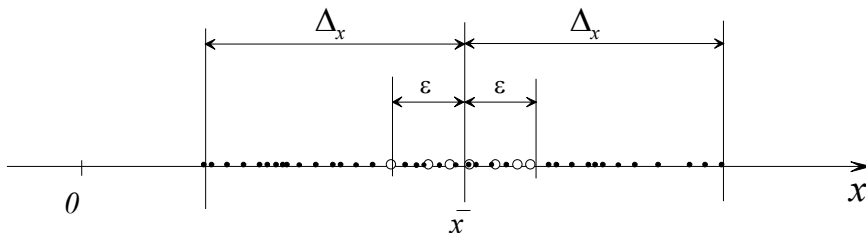


Рис.1.2. Сравнение ширины полос рассеяния  $2\Delta_x$  результатов отдельных измерений (чёрные точки) и среднего арифметического  $2\varepsilon$  (светлые точки)

Окончательно, результат представляют в виде:

$$x = \bar{x} \pm \varepsilon.$$

*Очень важно помнить, что указание погрешности без доверительной вероятности лишено смысла.*

## 1.6. Исключение промахов

Прежде, чем производить оценку случайной погрешности из выборки – ряда полученных результатов измерений – должны быть исключены промахи.

Согласно рекомендациям *ГОСТ 8.736-2011 Измерения прямые многократные. Методы обработки результатов измерений. Основные положения* для исключения грубых погрешностей необходимо использовать ста-

статистический критерий Граббса. Критерий Граббса основан на предположении, что группа результатов измерений принадлежит нормальному распределению. Предполагая, что наибольший  $x_{\max}$  и (или) наименьший  $x_{\min}$  результат измерений вызван грубыми погрешностями, вычисляют для этих значений критерии Граббса  $G_1$  и  $G_2$ :

$$G_1 = \frac{|x_{\max} - \bar{x}|}{S} \quad \text{и} \quad G_2 = \frac{|\bar{x} - x_{\min}|}{S}, \quad (1.7)$$

где  $S$  – оценка СКВО результатов отдельных измерений, определяемая по формуле (1.5).

Затем сравнивают  $G_1$  и  $G_2$  с теоретическим значением  $G_T$  критерия Граббса при выбранном уровне значимости  $q$  (табл. 1.3).

Если  $G_1 > G_T$ , то  $x_{\max}$  исключают из полученного ряда результатов измерений как маловероятное значение, если  $G_2 > G_T$  то из полученного ряда результатов измерений исключают  $x_{\min}$  как маловероятное значение. Далее вновь вычисляют среднее арифметическое и среднее квадратическое отклонение по формулам (1.3) и (1.5) для ряда результатов измерений, из которого исключены  $x_{\max}$  и (или)  $x_{\min}$ , и процедуру проверки наличия промахов повторяют.

Таблица 1.3

Критические значения  $G_T$  для критерия Граббса

| $n$ | Одно наибольшее или одно наименьшее значение при уровне значимости $q$ |           |
|-----|--|-----------|
|     | свыше 1 %  | Свыше 5 % |
| 3   | 1,155  | 1,155     |
| 4   | 1,496  | 1,481     |
| 5   | 1,764  | 1,715     |
| 6   | 1,973  | 1,887     |
| 7   | 2,139  | 2,020     |
| 8   | 2,274  | 2,126     |

Если  $G_1 \leq G_T$ , то  $x_{\max}$  не считают промахом и его сохраняют в ряду результатов измерений; аналогично, если  $G_2 \leq G_T$ , то  $x_{\min}$  не считают промахом и его сохраняют в ряду результатов измерений.

## 1.7. Оценка суммарной погрешности прямых измерений

Суммарная погрешность измерения определяется систематической и случайной погрешностями. Вопрос о правилах сложения систематической и случайной погрешностей не имеет строгого решения и решается разным образом. Иногда рекомендуют отказаться вообще от нахождения суммарной погрешности и давать в качестве меры суммарной погрешности две погрешности систематическую и случайную.

Однако на практике, чтобы применять результаты измерения, удобнее использовать общую погрешность вне зависимости от причин её породивших. Поэтому приходится как-то комбинировать систематическую и случайную погрешности, чтобы получить единую числовую характеристику погрешности. При этом очень важно отметить, что вопрос комбинирования систематической и случайной погрешностей актуален только в том случае, если одна из них не превышает другую более чем в несколько раз.

Если выполняется условие  $\theta_{\Sigma} / S_{\bar{x}} > 8$ , то можно пренебречь случайной погрешностью, и суммарная погрешность измерений  $\Delta$  будет определяться систематической погрешностью, т. е.  $\Delta = \theta_{\Sigma}$ .

В случае, когда случайными погрешностями можно пренебречь, применимы однократные измерения. При однократных измерениях суммарная погрешность определяется погрешностью применённых средств измерения, т. е. классом точности прибора, и вычисляется по формулам, приведённым в п. 1.3. Погрешности  $\theta_i$  применённых средств измерений принимаются равными значениям основной погрешности  $\Delta_p$  средства измерений, т. е.  $\theta_i = \Delta_p$ .

Однократные измерения используются, как правило, в серийных измерениях. Возможность использования однократных измерений устанавливается предварительными многократными измерениями: измерений должно быть не менее трёх, чтобы исключить промах.

*Многократные измерения* проводятся, когда случайными погрешностями пренебречь нельзя. В этом случае вычисление суммарной погрешности зависит от соотношения  $\theta_{\Sigma}$  и  $S_{\bar{x}}$ .

Если выполняется условие  $\theta_{\Sigma} / S_{\bar{x}} < 0,8$ , то систематической погрешностью можно пренебречь, и суммарная погрешность измерений  $\Delta$  будет определяться случайной погрешностью, т. е.  $\Delta = \varepsilon = \pm t_{p,n} S_{\bar{x}}$ .

Если выполняется условие  $0,8 < \theta_{\Sigma} / S_{\bar{x}} < 8$ , то следует учитывать как случайную, так и систематическую погрешность. При этом полагают систематическую ошибку также распределённой по нормальному закону. Тогда суммарную погрешность вычисляют по формуле:

$$\Delta = K S_{\Sigma}, \quad (1.8)$$

где  $S_{\Sigma}$  – СКО результата измерений с учётом систематической и случайной погрешностей, причём согласно *ГОСТ 8.736-2011 Измерения прямые многократные. Методы обработки результатов измерений. Основные положения*

$$S_{\Sigma} = \sqrt{S_{\theta}^2 + S_{\bar{x}}^2}, \quad (1.9)$$

$K$  – эмпирический коэффициент, вычисляемый по формуле:

$$K = \frac{\varepsilon + \theta_{\Sigma}}{S_{\theta} + S_{\bar{x}}}, \quad (1.10)$$

где  $S_{\theta}$  – среднее квадратическое отклонение НСП, вычисляемое по формуле:

$$S_{\theta} = \frac{\theta_{\Sigma}}{\sqrt{3}}. \quad (1.11)$$

$S_{\bar{x}}$  – СКО среднего арифметического результатов измерения, вычисляемая по формуле (1.6).

## 1.8. Порядок выполнения работы

Работа рассчитана на 4 ч.

1. Получить от преподавателя номер варианта и выписать исходные данные в табличной форме, как представлено в Приложении 1.
2. Пользуясь рекомендациями табл. 1.1, определяют составляющие НСП: составляющую  $\theta_1$ , обусловленную погрешностью средства измерения и составляющую  $\theta_2$ , обусловленную погрешностью меры, как равные основной погрешности  $\Delta_p$  измерительного прибора и меры соответственно.
3. По формуле (1.1) вычисляют предел  $\theta_{\Sigma}$  НСП (число составляющих НСП  $m=2$ ).
4. Определяют случайную погрешность.

- Сначала проверяют выборку результатов измерений на наличие промахов. По формуле (1.3) рассчитывают оценку математического ожидания результата измерений как среднее арифметическое  $\bar{x}$  результатов ( $n = 6$ ). Затем по формуле (1.5) находят  $S$  – оценку СКО отдельных результатов. Расчёты вести в табличной форме (табл. 1.4).

Таблица 1.4

Расчёт среднего арифметического, СКО результатов измерений и СКО среднего арифметического

| $x_i$ | $\bar{x}$ | $x_i - \bar{x}$ | $(x_i - \bar{x})^2$ | $S$ | $S_{\bar{x}}$ |
|-------|-----------|-----------------|---------------------|-----|---------------|
| ...   |           |                 |                     |     |               |
| ...   |           |                 |                     |     |               |
| ...   |           |                 |                     |     |               |

- В представленной выборке берут минимальное значение  $x_{\min}$  и максимальное значение  $x_{\max}$  результатов измерений и по формулам (1.7) рассчитывают критерии Граббса  $G_1$  и  $G_2$ .

- По табл. 1.3 для уровня значимости 5 % и объёма выборки  $n = 6$  выписывают значение критерия  $G_T$  и сравнивают его расчётными значениями  $G_1$  и  $G_2$ . Если  $G_1 > G_T$ , то  $x_{\max}$  исключают из полученного ряда результатов измерений как маловероятное значение, аналогично, если  $G_2 > G_T$ , то из полученного ряда результатов измерений исключают  $x_{\min}$  как маловероятное значение. Если  $G_1 \leq G_T$ , то  $x_{\max}$  не считают промахом и его сохраняют в ряду результатов измерений; аналогично, если  $G_2 \leq G_T$ , то  $x_{\min}$  не считают промахом и его сохраняют в ряду результатов измерений.

- Если  $x_{\max}$  и (или)  $x_{\min}$  были исключены из выборки, то вновь вычисляют для очищенной от промахов выборки среднее арифметическое по формуле (1.3) и СКО среднего арифметического – по формуле (1.6).

- По формуле (1.4) определяют предельное значение  $\varepsilon$  случайной погрешности; коэффициент Стьюдента находят по табл. 1.2 для доверительной вероятности  $P = 95 \%$ .

5. Находят отношение  $\theta_{\Sigma}/S_{\bar{x}}$ . Если  $0,8 < \theta_{\Sigma}/S_{\bar{x}} < 8$ , то производят оценку суммарной погрешности измерений.

- По формуле (1.11) определяют СКО НСП.

- Затем по формуле (1.9) рассчитывают СКО  $S_{\Sigma}$  результата измерений с учётом систематической и случайной погрешностей.

- По формуле (1.8) рассчитывают суммарную погрешность  $\Delta$ , причём эмпирический коэффициент  $K$  определяют по формуле (1.10).

6. Записывают окончательный результат измерений в виде:

$$\bar{x} \pm \Delta; P,$$

где  $P$  – значение доверительной вероятности.

Окончательно погрешность оценки измеряемой величины представляют с двумя значащими цифрами (не более). Сохраняемую вторую значащую цифру в погрешности оценки измеряемой величины при округлении увеличивают на единицу, если отбрасываемая цифра незначащего младшего разряда больше, либо равна пяти. И не изменяют, если она меньше пяти. Число значащих цифр в промежуточных вычислениях при обработке результатов измерений должно быть на две больше, чем в окончательном результате. Погрешность при промежуточных вычислениях должна быть выражена не более, чем тремя значащими цифрами.

## 1.9. Пример выполнения работы

1. Выпишем исходные данные в табличной форме (см. ниже).

|                   |                             |         |
|-------------------|-----------------------------|---------|
| Прибор            | Диапазон измерения по шкале | 0...500 |
|                   | Класс точности              | 1,0     |
| Установочная мера | Номинальное значение        | 100     |
|                   | Класс точности              | 0,2     |
| Показания прибора | Первое измерение            | 200     |
|                   | Второе измерение            | 193     |
|                   | Третье измерение            | 215     |
|                   | Четвёртое измерение         | 191     |
|                   | Пятое измерение             | 218     |
|                   | Шестое измерение            | 315     |

2. Определим НСП.

Согласно варианту исходных данных у НСП две составляющие:  $\theta_1$  – составляющая, обусловленная погрешностью средства измерения и  $\theta_2$  – составляющая, обусловленная погрешностью меры.

Погрешность применённых средств измерений принимается равной значению основной погрешности  $\Delta_p$  средства измерений, т. е.  $\theta_i = \Delta_p$ . Последняя определяется классом точности средства измерений, тогда согласно рекомендациям п. 1.3 для измерительного прибора:

$$\Delta_p = \pm \frac{\gamma}{100} X_N = \pm \frac{1}{100} 500 = \pm 5,0$$

где  $\gamma$  – приведённая погрешность измерительного прибора, равная 1 % (класс точности 1,0);

$X_N$  – нормирующее значение, равное верхнему пределу измерений, т.е. 500 (см. табл. 1.1).

Для меры:

$$\Delta_p = \pm \frac{\gamma}{100} X_N = \pm \frac{0,2}{100} 100 = \pm 0,2,$$

где  $\gamma$  – приведённая погрешность измерительного прибора, равная 0,2 % (класс точности 0,2);

$X_N$  – нормирующее значение, равное номинальному значению меры, т.е. 100 (см. табл. 1.1);

Согласно (1.1) при числе составляющих НСП  $m < 3$  предел НСП вычисляется следующим образом:

$$\theta_{\Sigma} = \pm \sum_{i=m}^m |\theta_i| = \pm (\theta_1 + \theta_2) = \pm (5,0 + 0,2) = 5,2.$$

3. Определим случайную погрешность.

Сначала определим наличие промахов. В представленной выборке проверим минимальное значение  $x_{\min} = 191$  и максимальное значение  $x_{\max} = 315$ .

Рассчитаем по формуле (1.3) оценку математического ожидания результата измерений как среднее арифметическое:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{6} (200 + 193 + 215 + 191 + 218 + 315) = 222.$$

Оценку СКО отдельных результатов рассчитаем по формуле (1.5):

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - 222)^2}{6-1}} = 46,9.$$

Расчёты среднего арифметического и СКО для удобства лучше проводить в табличной форме (см. табл. 1.4).

Рассчитаем по формулам (1.7) критерии Граббса  $G_1$  и  $G_2$ :

$$G_1 = \frac{|x_{\max} - \bar{x}|}{S} = \frac{|315 - 222|}{46,9} = 1,982,$$

$$G_2 = \frac{|\bar{x} - x_{\min}|}{S} = \frac{|222 - 191|}{46,9} = 0,6610.$$

По табл. 1.3 для уровня значимости 5 % и объёма выборки  $n = 6$  теоретическое значение критерия  $G_T = 1,887$ .

Так как  $G_1 > G_T$ , то значение 315 исключаем из полученного ряда результатов измерений как маловероятное значение, а значение 191 промахом не считается, так как  $G_2 < G_T$ .

Вновь вычисляем среднее арифметическое и СКО среднего арифметического по формулам (1.3) и (1.6) для выборки, из которой исключено значение 315:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{5} (200 + 193 + 215 + 191 + 218) = 203,4,$$

$$S_x = \frac{S}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - 203,4)^2}{5(5-1)}} = 5,57.$$

Расчёты среднего арифметического и СКО для выборки, очищенной от промахов, удобней проводить в табличной форме (см. табл. 1.4).

В нашем случае процедуру проверки наличия промахов не повторяем, так как очевидно, что оставшиеся значения промахами не являются.

Предельное значение  $\varepsilon$  случайной погрешности вычисляем по формуле (1.4):

$$\varepsilon = \pm t_{P,n} \cdot S_x = \pm 2,8 \cdot 5,57 = \pm 15,7,$$

где коэффициент Стьюдента ( $t_{P,n} = 2,8$ ) определили по табл. 1.2 для доверительной вероятности  $P = 95$  % и объёма выборки  $n = 5$ .

4. Оценка суммарной погрешности измерений.

Отношение  $\theta_\Sigma / S_x = 5,2 / 5,6 = 0,93$ .



Так как  $0,8 < \theta_{\Sigma} / S_{\bar{x}} < 8$ , то следует учитывать как случайную, так и систематическую погрешность.

Определим по формуле (1.11) среднее квадратическое отклонение НСП:

$$S_{\theta} = \frac{\theta_{\Sigma}}{\sqrt{3}} = \frac{5,2}{\sqrt{3}} = 3,0.$$

Затем рассчитаем по формуле (1.9) СКО результата измерений с учётом систематической и случайной погрешностей:

$$S_{\Sigma} = \sqrt{S_{\theta}^2 + S_{\bar{x}}^2} = \sqrt{3^2 + 5,57^2} = 6,32.$$

Суммарную погрешность рассчитаем по формуле (1.8):

$$\Delta = KS_{\Sigma} = 2,44 \cdot 6,32 = 15,41,$$

где эмпирический коэффициент  $K$  определили по формуле (1.10):

$$K = \frac{\varepsilon + \theta_{\Sigma}}{S_{\theta} + S_{\bar{x}}} = \frac{15,7 + 5,2}{3,0 + 5,57} = 2,44.$$

Окончательно результат измерений запишем в виде:

$$203 \pm 15; P = 95 \%$$

## 1.10. Содержание отчёта

1. Таблица с исходными данными полученного варианта.
2. Расчёты НСП.
3. Расчёты случайной погрешности с результатами расчёта среднего арифметического, СКО отдельных результатов и СКО среднего арифметического в табличной форме (см. табл. 1.4).
4. Расчёты суммарной погрешности результатов измерений.

## 1.11. Контрольные вопросы

1. Что такое действительное значение измеряемой величины и погрешность измерения?
2. Чем действительное значение измеряемой величины отличается от истинного?
3. Какие погрешности измерения вы знаете?
4. Каковы причины промахов?
5. Что такое неисключаемая систематическая погрешность?

6. Что характеризует класс точности средства измерений?
7. Как оценивают доверительный интервал результатов измерений?
8. В каких случаях можно пренебречь неисключаемой систематической погрешностью?
9. В каких случаях можно пренебречь случайной погрешностью?
10. В каких случаях при оценке суммарной погрешности нужно учитывать как неисключаемую систематическую погрешность, так и случайную погрешность?

## Приложение 1

## Варианты заданий для выполнения работы

## Вариант 1

|                   |                             |         |
|-------------------|-----------------------------|---------|
| Прибор            | Диапазон измерения по шкале | 0...100 |
|                   | Класс точности              | 0,4     |
| Установочная мера | Номинальное значение        | 50      |
|                   | Класс точности              | 0,1     |
| Показания прибора | Первое измерение            | 10,0    |
|                   | Второе измерение            | 9,8     |
|                   | Третье измерение            | 9,8     |
|                   | Четвёртое измерение         | 9,7     |
|                   | Пятое измерение             | 10,8    |
|                   | Шестое измерение            | 9,5     |

## Вариант 2

|                   |                             |                     |
|-------------------|-----------------------------|---------------------|
| Прибор            | Диапазон измерения по шкале | -50...+50           |
|                   | Класс точности              | $\frac{2}{\sqrt{}}$ |
| Установочная мера | Номинальное значение        | 10                  |
|                   | Класс точности              | 1                   |
| Показания прибора | Первое измерение            | 45                  |
|                   | Второе измерение            | 46                  |
|                   | Третье измерение            | 39                  |
|                   | Четвёртое измерение         | 44                  |
|                   | Пятое измерение             | 46                  |
|                   | Шестое                      | 47                  |

## Вариант 3

|                   |                             |       |
|-------------------|-----------------------------|-------|
| Прибор            | Диапазон измерения по шкале | 0÷100 |
|                   | Класс точности              | 1,5   |
| Установочная мера | Номинальное значение        | 10    |
|                   | Класс точности              | 0,2   |
| Показания прибора | Первое измерение            | 10,0  |
|                   | Второе измерение            | 10,2  |
|                   | Третье измерение            | 10,5  |
|                   | Четвёртое измерение         | 10,4  |
|                   | Пятое измерение             | 10,1  |
|                   | Шестое измерение            | 11,1  |

Вариант 4

|                   |                             |        |
|-------------------|-----------------------------|--------|
| Прибор            | Диапазон измерения по шкале | 10÷100 |
|                   | Класс точности              | 1,0    |
| Установочная мера | Номинальное значение        | 10     |
|                   | Класс точности              | 0,15   |
| Показания прибора | Первое измерение            | 18,0   |
|                   | Второе измерение            | 18,2   |
|                   | Третье измерение            | 18,5   |
|                   | Четвёртое измерение         | 18,4   |
|                   | Пятое измерение             | 18,1   |
|                   | Шестое измерение            | 19,1   |

Вариант 5

|                   |                             |            |
|-------------------|-----------------------------|------------|
| Прибор            | Диапазон измерения по шкале | -50...+100 |
|                   | Класс точности              | 1          |
| Установочная мера | Номинальное значение        | 10         |
|                   | Класс точности              | 1,5        |
| Показания прибора | Первое измерение            | 77         |
|                   | Второе измерение            | 78         |
|                   | Третье измерение            | 71         |
|                   | Четвёртое измерение         | 76         |
|                   | Пятое измерение             | 78         |
|                   | Шестое                      | 79         |

Вариант 6

|                   |                             |           |
|-------------------|-----------------------------|-----------|
| Прибор            | Диапазон измерения по шкале | -10...+50 |
|                   | Класс точности              | ⑥         |
| Установочная мера | Номинальное значение        | 10        |
|                   | Класс точности              | 0,6       |
| Показания прибора | Первое измерение            | 5         |
|                   | Второе измерение            | 6         |
|                   | Третье измерение            | 7         |
|                   | Четвёртое измерение         | 9         |
|                   | Пятое измерение             | 4         |
|                   | Шестое измерение            | 11        |

## Вариант 7

|                   |                             |           |
|-------------------|-----------------------------|-----------|
| Прибор            | Диапазон измерения по шкале | -10...+50 |
|                   | Класс точности              | 6         |
| Установочная мера | Номинальное значение        | 10        |
|                   | Класс точности              | 0,6       |
| Показания прибора | Первое измерение            | 5         |
|                   | Второе измерение            | 6         |
|                   | Третье измерение            | 6         |
|                   | Четвёртое измерение         | 7         |
|                   | Пятое измерение             | 9         |
|                   | Шестое                      | 4         |

## Вариант 8

|                   |                             |             |
|-------------------|-----------------------------|-------------|
| Прибор            | Диапазон измерения по шкале | -150...+150 |
|                   | Класс точности              | 1,5         |
| Установочная мера | Номинальное значение        | 50          |
|                   | Класс точности              | 0,5         |
| Показания прибора | Первое измерение            | 45          |
|                   | Второе измерение            | 41          |
|                   | Третье измерение            | 47          |
|                   | Четвёртое измерение         | 45          |
|                   | Пятое измерение             | 44          |
|                   | Шестое измерение            | 45          |

## Вариант 9

|                   |                             |           |
|-------------------|-----------------------------|-----------|
| Прибор            | Диапазон измерения по шкале | -5...+100 |
|                   | Класс точности              | 10        |
| Установочная мера | Номинальное значение        | 50        |
|                   | Класс точности              | 1,0       |
| Показания прибора | Первое измерение            | 10        |
|                   | Второе измерение            | 12        |
|                   | Третье измерение            | 15        |
|                   | Четвёртое измерение         | 10        |
|                   | Пятое измерение             | 19        |
|                   | Шестое измерение            | 11        |

Вариант 10

|                   |                             |           |
|-------------------|-----------------------------|-----------|
| Прибор            | Диапазон измерения по шкале | -50...+50 |
|                   | Класс точности              | 1,5       |
| Установочная мера | Номинальное значение        | 5         |
|                   | Класс точности              | 1,5       |
| Показания прибора | Первое измерение            | 5         |
|                   | Второе измерение            | 0         |
|                   | Третье измерение            | 4         |
|                   | Четвёртое измерение         | -1        |
|                   | Пятое измерение             | 3         |
|                   | Шестое измерение            | 1         |

Вариант 11

|                   |                             |           |
|-------------------|-----------------------------|-----------|
| Прибор            | Диапазон измерения по шкале | -50...+10 |
|                   | Класс точности              | 0,5       |
| Установочная мера | Номинальное значение        | 5         |
|                   | Класс точности              | 1,0       |
| Показания прибора | Первое измерение            | 3         |
|                   | Второе измерение            | 1         |
|                   | Третье измерение            | 5         |
|                   | Четвёртое измерение         | -1        |
|                   | Пятое измерение             | 2         |
|                   | Шестое измерение            | 2         |

Вариант 12

|                   |                             |        |
|-------------------|-----------------------------|--------|
| Прибор            | Диапазон измерения по шкале | 0...50 |
|                   | Класс точности              | 1      |
| Установочная мера | Номинальное значение        | 10     |
|                   | Класс точности              | 0,2    |
| Показания прибора | Первое измерение            | 10,0   |
|                   | Второе измерение            | 10,1   |
|                   | Третье измерение            | 10,2   |
|                   | Четвёртое измерение         | 10,3   |
|                   | Пятое измерение             | 10,9   |
|                   | Шестое измерение            | 10,0   |

Вариант 13

|                   |                             |          |
|-------------------|-----------------------------|----------|
| Прибор            | Диапазон измерения по шкале | 10...100 |
|                   | Класс точности              | ①        |
| Установочная мера | Номинальное значение        | 10       |
|                   | Класс точности              | 0,15     |
| Показания прибора | Первое измерение            | 12,1     |
|                   | Второе измерение            | 11,9     |
|                   | Третье измерение            | 12,1     |
|                   | Четвёртое измерение         | 12,2     |
|                   | Пятое измерение             | 12,7     |
|                   | Шестое измерение            | 12,3     |

Вариант 14

|                   |                             |        |
|-------------------|-----------------------------|--------|
| Прибор            | Диапазон измерения по шкале | 0...50 |
|                   | Класс точности              | ①,5    |
| Установочная мера | Номинальное значение        | 50     |
|                   | Класс точности              | 0,2    |
| Показания прибора | Первое измерение            | 1,1    |
|                   | Второе измерение            | 1,5    |
|                   | Третье измерение            | 2,1    |
|                   | Четвёртое измерение         | 1,6    |
|                   | Пятое измерение             | 1,2    |
|                   | Шестое измерение            | 1,7    |

Вариант 15

|                   |                             |       |
|-------------------|-----------------------------|-------|
| Прибор            | Диапазон измерения по шкале | 0÷200 |
|                   | Класс точности              | ②,5   |
| Установочная мера | Номинальное значение        | 10    |
|                   | Класс точности              | 2,0   |
| Показания прибора | Первое измерение            | 100,5 |
|                   | Второе измерение            | 100,9 |
|                   | Третье измерение            | 101,0 |
|                   | Четвёртое измерение         | 102,0 |
|                   | Пятое измерение             | 94,8  |
|                   | Шестое измерение            | 99,0  |

Вариант 16

|                   |                             |           |
|-------------------|-----------------------------|-----------|
| Прибор            | Диапазон измерения по шкале | -10...+50 |
|                   | Класс точности              | 0,02/0,01 |
| Установочная мера | Номинальное значение        | 5         |
|                   | Класс точности              | 0,01      |
| Показания прибора | Первое измерение            | 10,0      |
|                   | Второе измерение            | 11,0      |
|                   | Третье измерение            | 12,5      |
|                   | Четвёртое измерение         | 10,0      |
|                   | Пятое измерение             | 9,9       |
|                   | Шестое измерение            | 10,0      |

Вариант 17

|                   |                             |           |
|-------------------|-----------------------------|-----------|
| Прибор            | Диапазон измерения по шкале | -50...+50 |
|                   | Класс точности              | 0,04/0,02 |
| Установочная мера | Номинальное значение        | 5         |
|                   | Класс точности              | 0,02      |
| Показания прибора | Первое измерение            | 11,0      |
|                   | Второе измерение            | 11,1      |
|                   | Третье измерение            | 12,3      |
|                   | Четвёртое измерение         | 10,4      |
|                   | Пятое измерение             | 9,8       |
|                   | Шестое измерение            | 10,3      |

Вариант 18

|                   |                             |         |
|-------------------|-----------------------------|---------|
| Прибор            | Диапазон измерения по шкале | 0...100 |
|                   | Класс точности              | 0,4     |
| Установочная мера | Номинальное значение        | 20      |
|                   | Класс точности              | 0,1     |
| Показания прибора | Первое измерение            | 5,0     |
|                   | Второе измерение            | 4,2     |
|                   | Третье измерение            | 5,1     |
|                   | Четвёртое измерение         | 5,2     |
|                   | Пятое измерение             | 5,0     |
|                   | Шестое измерение            | 5,0     |



Вариант 19

|                   |                             |          |
|-------------------|-----------------------------|----------|
| Прибор            | Диапазон измерения по шкале | 50...100 |
|                   | Класс точности              | 1,5      |
| Установочная мера | Номинальное значение        | 50       |
|                   | Класс точности              | 0,2      |
| Показания прибора | Первое измерение            | 60,2     |
|                   | Второе измерение            | 62,1     |
|                   | Третье измерение            | 60,0     |
|                   | Четвёртое измерение         | 60,5     |
|                   | Пятое измерение             | 60,6     |
|                   | Шестое измерение            | 60,7     |

Вариант 20

|                   |                             |         |
|-------------------|-----------------------------|---------|
| Прибор            | Диапазон измерения по шкале | 0...100 |
|                   | Класс точности              | 1,5/1,0 |
| Установочная мера | Номинальное значение        | 50      |
|                   | Класс точности              | 0,2     |
| Показания прибора | Первое измерение            | 5,0     |
|                   | Второе измерение            | 5,5     |
|                   | Третье измерение            | 6,0     |
|                   | Четвёртое измерение         | 4,0     |
|                   | Пятое измерение             | 6,1     |
|                   | Шестое измерение            | 5,5     |

Вариант 21

|                   |                             |         |
|-------------------|-----------------------------|---------|
| Прибор            | Диапазон измерения по шкале | 0...+50 |
|                   | Класс точности              | 0,6     |
| Установочная мера | Номинальное значение        | 10      |
|                   | Класс точности              | 0,2     |
| Показания прибора | Первое измерение            | 4,8     |
|                   | Второе измерение            | 4,0     |
|                   | Третье измерение            | 5,2     |
|                   | Четвёртое измерение         | 5,0     |
|                   | Пятое измерение             | 4,9     |
|                   | Шестое измерение            | 4,7     |

## Вариант 22

|                   |                             |         |
|-------------------|-----------------------------|---------|
| Прибор            | Диапазон измерения по шкале | 0...100 |
|                   | Класс точности              | 1,5/0,5 |
| Установочная мера | Номинальное значение        | 25      |
|                   | Класс точности              | 0,2     |
| Показания прибора | Первое измерение            | 15,0    |
|                   | Второе измерение            | 15,5    |
|                   | Третье измерение            | 16,0    |
|                   | Четвёртое измерение         | 14,4    |
|                   | Пятое измерение             | 17,1    |
|                   | Шестое измерение            | 15,5    |