

# ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ Молекулярно Кинетической Теории ГАЗОВ

ПОНЯТИЕ и ВЫВОД УРАВНЕНИЯ

**ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ  
МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ  
ГАЗОВ**

$$p = \frac{1}{3} \cdot m_0 \cdot n \cdot \bar{v}^2$$

(уравнение Клаузиуса),

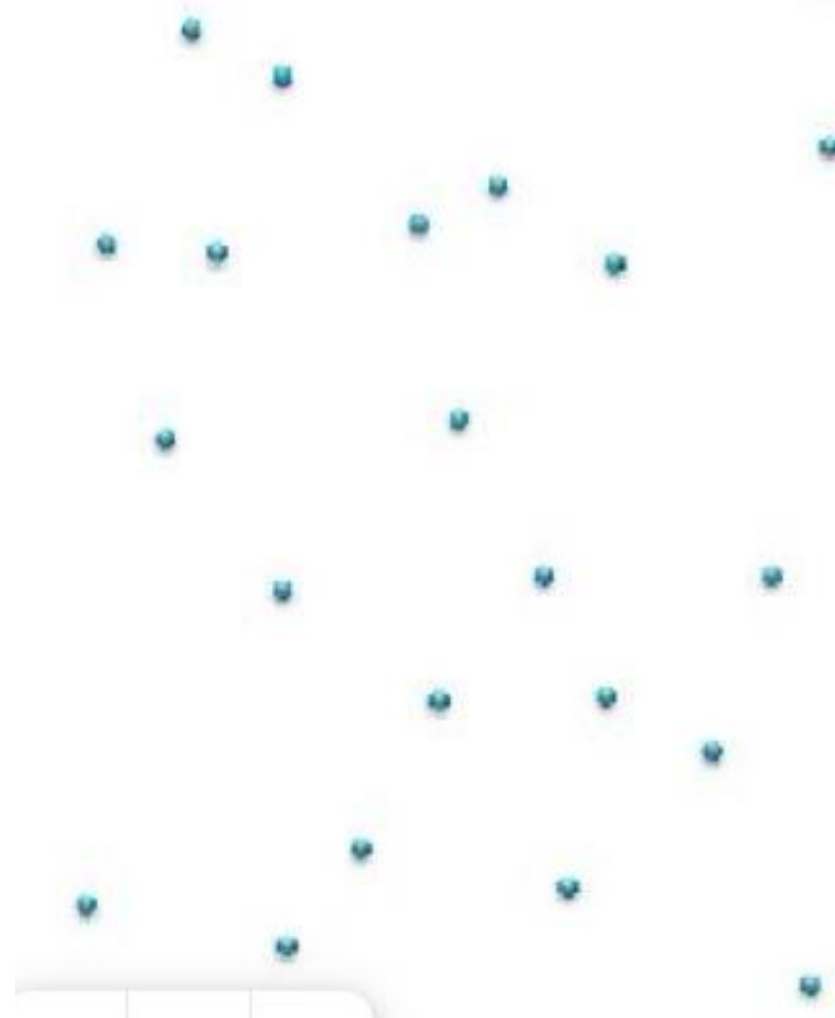
устанавливает связь между микро- и  
макромиром,  $p = \frac{1}{3} n m_0 \bar{v}^2 \rightarrow$   
 $\rho$  - измеряют экспериментально.

$$p = \frac{1}{3} \rho \bar{v}^2$$

# Идеальный газ

Идеальный газ — это модель реального газа, согласно которой:

- 1) Молекулы газа очень малы и представляют собой упругие шарики.
- 2) Молекулы этого газа движутся беспорядочно.
- 3) Взаимодействия между молекулами газа происходят только при соударениях, а соударения считаются абсолютно упругими.



## Смысл основного уравнения МКТ.

Итак, чтобы понять, в чем суть уравнения, необходимо осознать, что выводили его ученые, которые в XIX веке пытались доказать всему миру влияние микропараметров элементарных частиц на изменение макропараметров вполне осязаемых веществ.

Для теоретического доказательства и простоты восприятия использовалась модель реального газа, в которой поведение молекул можно было описать классической (Ньютоновской) механикой.

Такую модель называли идеальным газом.

- Каждая молекула этого газа имеет свою собственную массу и мгновенную скорость.
- Количество молекул определяется концентрацией.
- Если газ поместить в замкнутый сосуд, концентрация будет оставаться неизменной.

В таких условиях физический смысл основного уравнения МКТ сводится к пониманию, что все молекулы, находясь в постоянном движении, совершают абсолютно упругие удары о стенки сосуда.

**Каждый из таких ударов занимает момент времени  $\Delta t$  и определяет изменение импульса  $\Delta p$ .**

Зная, что отношение изменения импульса к промежутку времени формирует силу, получаем, что каждая молекула воздействует на определенную площадь  $S$  внутренней поверхности сосуда с силой  **$F = \Delta p / \Delta t$** .

Отношение силы  $F$  к площади  $S$  ничто иное, как давление:

$$p = F/S.$$

То есть, получается, что удар каждой молекулы газа создает давление на стенки сосуда.

И логично предположить, что, чем больше молекул и чем выше значение изменения импульса, тем сильнее создается давление.

Это и есть смысл основного уравнения МКТ идеального газа.

Ранее уже описывалось представление силы как  $F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$ .

Именно с такой силой одна молекула действует на стенку сосуда. Но внутри сосуда находится не одна такая молекула, их число -  $N$ . Поэтому общая сила, действующая на все стенки сосуда равна  $F = \frac{\Delta p}{\Delta t} N$ .

Однако, важно отметить, что **сила – это векторная величина**, то есть, она имеет направление.

И, так как, указанная промежуточная формула не сможет корректно отразить векторное представление силы, необходимо упростить систему и представить сосуд как правильный прямоугольный параллелепипед, ну, или, проще говоря, куб.

Исходя из основных положений МКТ, в газе, а, тем более, в идеальном газе, движение молекул хаотичное, а, значит, о каждую грань кубического сосуда в единицу времени будет ударяться примерно одинаковое количество молекул.

Как известно, **в кубе 6 граней**, то есть, из всего количества молекул, находящихся в сосуде, только 1/6 часть будет ударяться о данную грань:

$$F = \frac{1}{6} \frac{\Delta p}{\Delta t} N$$

Что же касается проблемы векторного представления силы, она тоже автоматически решилась, ведь, под каким бы углом не сталкивалась молекула с такой плоской стенкой, ее движение все равно будет рассматриваться в трехмерной системе координат для указанной грани

Для избавления от числительной характеристики  $N$  достаточно выразить ее из формулы концентрации:  $n=N/M \Rightarrow N=nV$ , где  $V$  - это объем кубического сосуда, который можно представить как площадь грани, умноженную на высоту:  **$V=Sh$** .

В данном случае высота - это максимально возможное расстояние от одной грани куба до другой. Если рассматривать движение молекул относительно конкретной грани, каждая такая частица, в среднем, проходит указанное расстояние  $h$  прежде, чем столкнется с другой гранью.

Согласно первому закону Ньютона, до момента столкновения молекула будет двигаться прямолинейно и равномерно, а значит, для нее будет справедливо равенство  **$h=vt$** .

Если учесть, что момент  $\Delta t$  изменения импульса  $\Delta p$  начинается сразу после предыдущего удара и заканчивается, как только происходит новый удар, можно утверждать, что время  $t$  прямолинейного движения молекулы соответствует значению  $\Delta t$ , то есть  **$h=v\Delta t$** .

## *Повторение – мать учения! (?)*

Согласно первому закону Ньютона, до момента столкновения молекула будет двигаться прямолинейно и равномерно, а значит, для нее будет справедливо равенство  $h=vt$ .

Если учесть, что момент  $\Delta t$  изменения импульса  $\Delta p$  начинается сразу после предыдущего удара и заканчивается, как только происходит новый удар, можно утверждать, что время  $t$  прямолинейного движения молекулы соответствует значению  $\Delta t$ , то есть

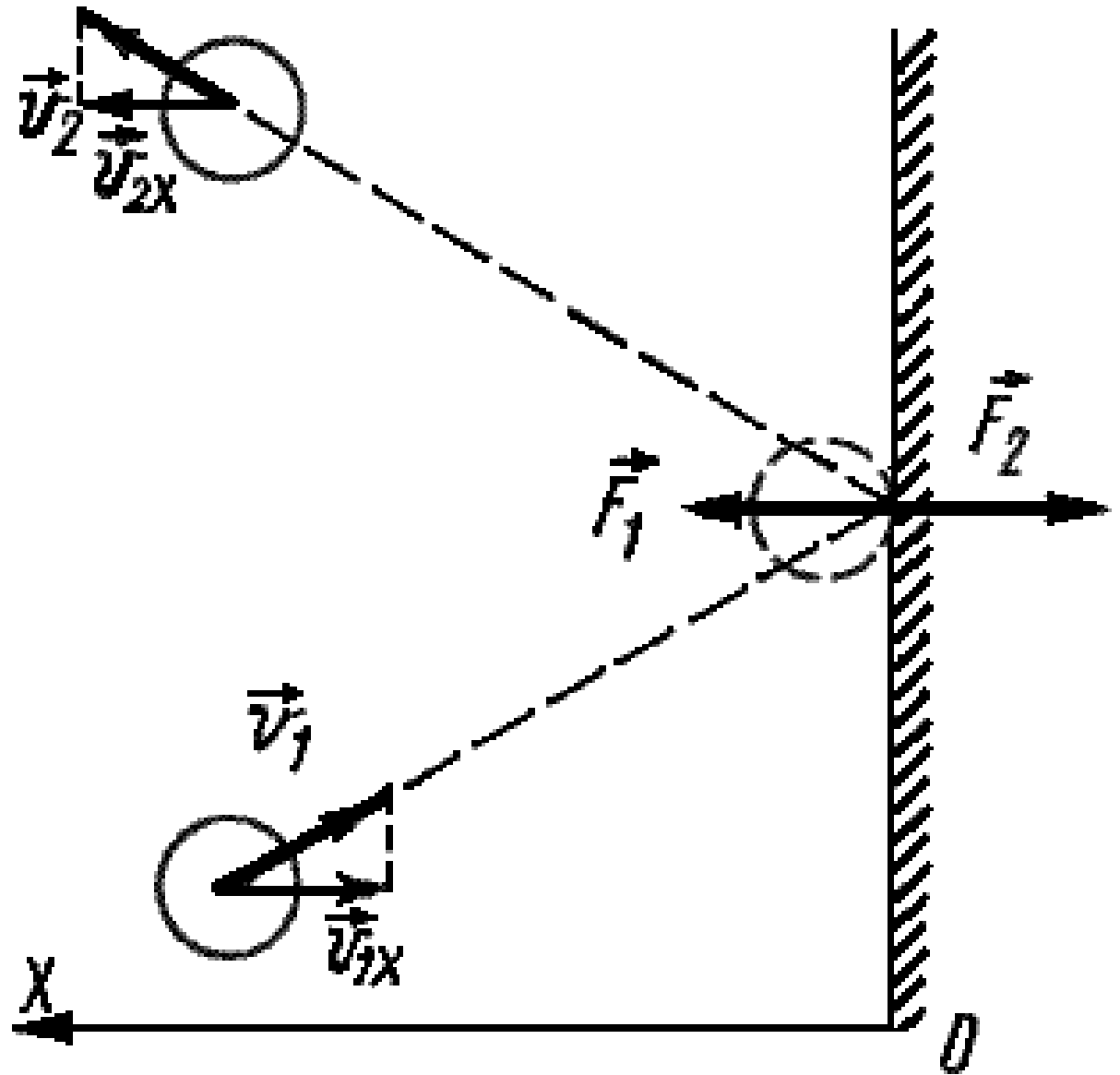
$$h=v\Delta t$$

Теперь стоит записать все, что было указано выше:

$$F = \frac{1}{6} \frac{\Delta p}{\Delta t} N = \frac{1}{6} \frac{\Delta p}{\Delta t} nV = \frac{1}{6} \frac{\Delta p}{\Delta t} nSh = \frac{1}{6} \frac{\Delta p}{\Delta t} nSv\Delta t = \frac{1}{6} \Delta p nSv$$


Далее необходимо  
разобраться с  
изменением  
импульса  $\Delta p$ .

Здесь, лучше всего,  
прибегнуть к  
изображению удара  
молекулы о стенку  
сосуда в линейной  
системе координат OX:



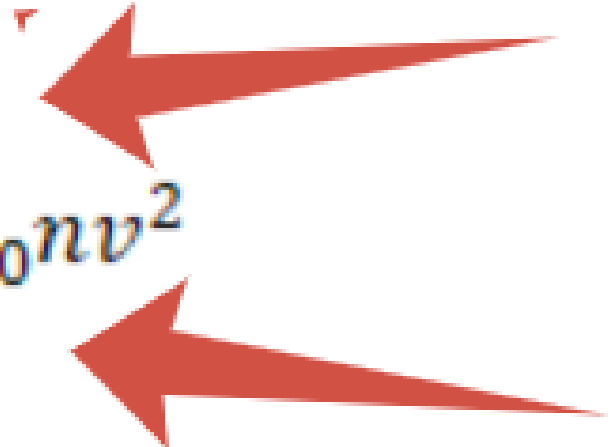
Зная, что в идеальном газе при соударениях с границами емкости молекулы ведут себя как упругие тела, проекция скоростного вектора на ось ОХ, проходящую под прямым углом к границе сосуда, **меняет свой знак на противоположный, но сохраняется неизменной по модулю**. Поэтому после соударения частицы с границей емкости проекция импульса молекулы на ось ОХ **меняется:**

**с  $m_0 v_{1x} = -m_0 v_x$  на  $m_0 v_{2x} = m_0 v_x$ , где  $m_0$  – масса молекула.**

**Таким образом, изменение импульса молекулы**

$$\Delta p = m_0 v_{2x} - m_0 v_{1x} = m_0 v_x - (-m_0 v_x) = 2m_0 v_x$$

Теперь необходимо преобразовать классическую формулу давления, представив, проекцию скоростного вектора как скорость относительно одной в двумерном пространстве т.е. относительно отрезка) и получить основное уравнение МКТ идеального газа:

$$p = \frac{F}{S} = \frac{1}{6} \Delta p n S v \div S = \frac{1}{6} (2m_0 v) n v = \frac{1}{3} m_0 n v^2$$


**ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ  
МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ  
ГАЗОВ**

$$p = \frac{1}{3} \cdot m_0 \cdot n \cdot \bar{v}^2$$

(уравнение Клаузиуса),

устанавливает связь между микро- и  
макромиром,  $p = \frac{1}{3} n m_0 \bar{v}^2 \rightarrow$   
 $\rho$  - измеряют экспериментально.

$$p = \frac{1}{3} \rho \bar{v}^2$$

Важно также отметить уникальность основного уравнения МКТ. Ведь если, например, представить  $m_0 n$  как плотность вещества, получится уже немного иной вид:

$$p = \frac{1}{3} \rho v^2$$

$$E_k = \frac{m_0 v^2}{2};$$

А если вспомнить формулу кинетической энергии, то картина поменяется еще сильнее:

$$p = \frac{1}{3} m_0 n v^2 = \frac{2}{3} n E_k$$

Также, используя зависимость скорости молекул от температуры, можно преобразовать основное уравнение МКТ идеального газа в следующий вид:

$p = nkT$ , где  $k$  – постоянная Больцмана ( $k = 1,38 * 10^{-23}$  Дж/К),  $T$  – температура в кельвинах (К).

Несмотря на самодостаточность уравнения, ее часто используют для нахождения **среднеквадратичной скорости молекул**, а также связанных с ней величин: **среднюю кинетическую энергию** и **абсолютную температуру**.

$$p = \frac{1}{3} n m_0 \overline{v^2}$$

**Но!** - это уравнение – *решение задачи в модели механики.*

Мы приняли, что газ состоит из хаотично движущихся молекул – и вычислили, как они действуют на стенку, какое давление создают, когда с ней сталкиваются.

**Но мы не измеряем скорости и массы отдельных молекул.**

На макроуровне мы умеем измерять температуру, которую мы связали со средней кинетической энергией молекул, а значит, и с микропараметрами: массой и средней скоростью одной молекулы:

$$\frac{3}{2} kT = \frac{m_0 \overline{v^2}}{2}$$

Подставив кинетическую энергию из одного уравнения в другое, получили:

$$p = nkT$$

В таком виде применять уравнение для решения задач все еще не удобно. Для измерения давления газа существуют различные приборы (манометры, барометры), для измерения температуры – термометры. Но мы не можем напрямую измерять концентрацию – количество частиц в единице объема. Преобразуем уравнение до удобного вида.

Концентрация – это, по определению, :  $\frac{N}{V}$

А количество молекул удобнее представить через количество вещества. Мы помним, что в одном моле вещества  $N_A$  молекул. Значит,  $N = \nu N_A$ :

$$p = \frac{NkT}{V}$$

Договоримся: чтобы каждый раз не перемножать постоянные величины  $N_A$  на  $k$ , сделаем это один раз, а произведение обозначим  $R$ :

$$R = kN_A = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1} = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$$

$$pV = \frac{m}{M} RT$$

**Получили уравнение, которое связывает три макропараметра идеального газа, которые легко измерить: объем, температуру и давление.** И если взять какое-то определенное количество газа, эти три параметра однозначно зададут его состояние, неизвестных в уравнении не останется. **Поэтому это уравнение называли уравнением состояния идеального газа, или иначе уравнением Менделеева – Клапейрона.** А на случай, если нам неудобно пользоваться количеством вещества в молях, можно его выразить через массу вещества:

Мы начали с движения молекул, придумали инструменты для его описания, а в итоге получили уравнение, которое связывает поддающиеся непосредственному измерению макропараметры.

$$p = \frac{1}{3} n m_0 \overline{v^2} \longrightarrow pV = \frac{m}{M} RT$$

*Так что справедливо называть основное уравнение МКТ=уравнение состояния и.газа :*

«Основное уравнение МКТ выглядит следующим образом:

$PV = nRT$ , где:

$P$  — давление газа (Па);

$V$  — объем газа ( $\text{м}^3$ );

$n$  — количество вещества газа (моль);

$R$  — универсальная газовая постоянная ( $8,314 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$ );

$T$  — абсолютная температура газа (К).

Рассмотрим каждую компоненту уравнения подробнее:

Давление ( $P$ ) — это сила, действующая на единицу площади стенок сосуда из-за столкновений молекул газа со стенками. Чем быстрее двигаются молекулы и чем их больше, тем больше давление газа.

Объем ( $V$ ) — это пространство, которое занимает газ. Объем влияет на давление и плотность молекул в данном пространстве.

Количество вещества ( $n$ ) отражает число молей газа в системе. Чем больше молекул газа, тем больше столкновений со стенками и, следовательно, выше давление.

Универсальная газовая постоянная ( $R$ ) — это постоянная, которая связывает энергию молекул с их температурой. Ее значение постоянно для всех идеальных газов.

Температура ( $T$ ) представляет кинетическую энергию молекул газа. Чем выше температура, тем быстрее движутся молекулы, что приводит к увеличению давления при постоянном объеме.»

Основное уравнение МКТ предполагает, что газ идеальный, что означает, что молекулы газа не обладают объемом и межмолекулярными силами.

В реальных условиях газы могут отклоняться от поведения идеального газа, особенно при высоких давлениях и низких температурах.

**Однако во многих условиях уравнение состояния идеального газа дает достаточно точные результаты и является мощным инструментом в термодинамике.**

Далее ещё два объяснения вывода  
«Основного уравнения МКТ газов»

... для лучшего запоминания (ли ?)

Учитывая основные положения МКТ газов, становится возможным связать величину давления с параметрами его молекул. В упрощенном виде ход рассуждений будет таким.

Для определения давления учтем, что, если средняя скорость молекулы равна

$$v_{\text{ср}}$$

то импульс, переданный ею при абсолютно упругом ударе о стенку сосуда, равен:

$$\Delta p = 2m_0 |v_{\text{ср}}|$$

Если концентрация молекул равна  **$n$** ,  
то **количество ударов** молекул о стенку сосуда площадью  **$S$**   
за время  **$t$**   
равно:

$$Z = n|v_{\text{ср}}|St$$

А полный импульс силы, действовавший на стенку, равен:

$$Ft = 2m_0|v_{\text{ср}}|Zt$$

Из двух последних формул найдем силу:

$$F = 2nm_0v_{\text{ср}}^2 S$$

Поскольку в ударах о стенку сосуда участвовали лишь молекулы, имеющие составляющую скорости, перпендикулярную стенке и направленную в ее сторону, то в среднем **импульс передавала только одна шестая молекул (в трехмерном пространстве молекулы могут двигаться в шести направлениях).**

Следовательно, среднее значение силы в шесть раз меньше полученного значения:

$$\overline{F} = \frac{1}{3} n m_0 v_{\text{ср}}^2 S$$

Поделив полученное значение силы на площадь, получим создаваемое ею давление:

$$p = \frac{1}{3} n m_0 v_{\text{ср}}^2$$

Иногда основное уравнение МКТ записывается с использованием средней кинетической энергии молекулы.

Средняя кинетическая энергия равна:

$$E_{\text{ср}} = \frac{m_0 v_{\text{ср}}^2}{2}$$

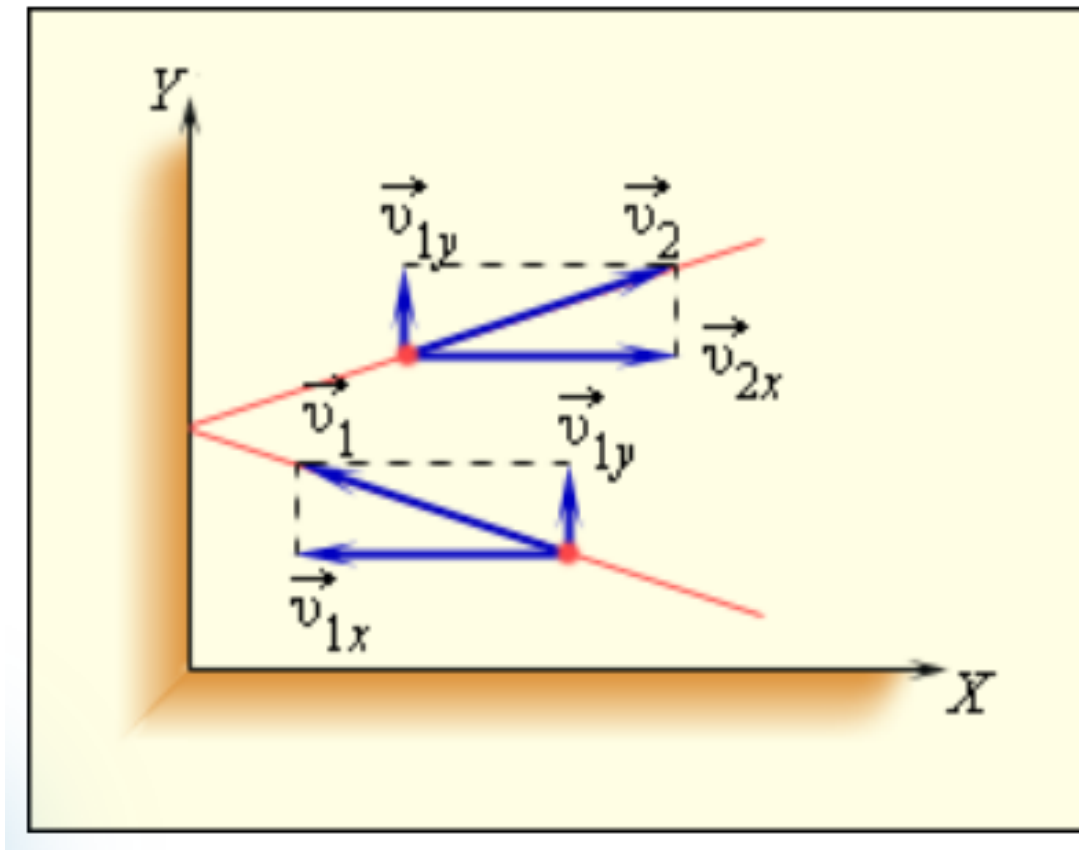
Выражая среднеквадратичную скорость из этой формулы и подставляя ее в предыдущую, получим:

$$p = \frac{2}{3} n E_{\text{ср}}$$

Давление идеального газа пропорционально концентрации и средней кинетической энергии молекулы.

Второе (третье)... –

Чтобы определить давление газа на стенку сосуда, учитывается модель идеального газа. Исходя из этого, происходит возникновение сил, которые подчиняются 3 закону Ньютона. Отсюда получим, что проекция скорости  $v_x$  перпендикулярна относительно стенки, а знак меняется на противоположный. Проекция  $v_y$  параллельна и постоянна. Это показано на рисунке 3. 2. 1.



*Рисунок 3.2.1.3.2.1. Упругое столкновение молекулы со стенкой.*

Отсюда следует, что изменение импульса можно записать в виде  $2m_0v_x$  с массой молекулы, равной  $m_0$ . Необходимо выделить площадь  $S$ , как показано на рисунке 3. 2. 2. По прошествии времени  $\Delta t$  с  $S$  поверхностью столкнутся молекулы с проекциями скорости  $v_x$ , которая направлена в сторону стены, и основанием цилиндра  $S$  с высотой  $v_x \Delta t$ .

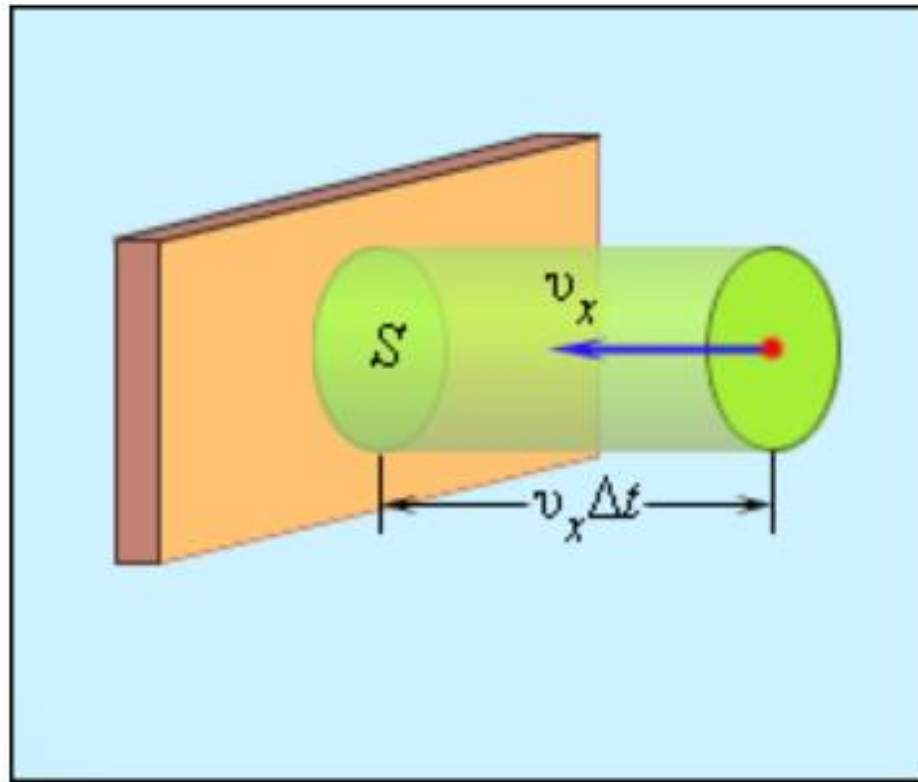


Рисунок 3.2.2. Определение числа столкновений молекул с поверхностью  $S$

Если за единицу объема брать сосуд с  $n$ -ым количеством молекул, тогда их число в объеме цилиндра нужно обозначить, как  $nSv_x\Delta t$ . Очевидно, что происходит столкновение только половины имеющихся молекул. Тогда количество ударов о  $S$  за время  $\Delta t$  равняется  $\frac{1}{2}nSv_x\Delta t$ .

При столкновении происходит изменение импульса  $2m_0v_x$ . Тогда формула  $nm_0v_x^2S\Delta t$  говорит о полном его изменении за определенный промежуток времени. Исходя из закона механики, изменение импульса всех молекул записывается как  $F\Delta t$ . Силой  $F$  обозначается средняя сила, которая действует на молекулы. Но 3 закон Ньютона говорит о том, что аналогичная сила по модулю оказывает действие на поверхность  $S$ . Данное утверждение можно зафиксировать  $F\Delta t = nm_0v_x^2S\Delta t$ .

Далее для упрощения следует разделить равенство на выражение  $S\Delta t$ . Формула примет вид  $p = \frac{F}{S} = nm_0v_x^2$  со значением  $p$ , обозначаемым в качестве давления газа на стенку сосуда.

Все молекулы, находящиеся в сосуде на единицу объема, имеют разные проекции скоростей на ось  $Ox$ . При столкновениях прослеживалось статистическое их распределение по скоростям, причем с разными направлениями векторов их скоростей.

## Определение 2

Распределением Максвелла называют распределение молекул газа по модулю скоростей.

Еще в 1860 г Дж. Максвелл вывел закон распределения молекул газа по скоростям, основываясь на основных положениях молекулярно-кинетической теории молекулы. Рисунок 3. 2. 3. наглядно показывает распределения молекул по скоростям с помощью кривых. На оси  $Ox$  располагается модуль скорости, а на  $Oy$  – количество молекул, находящихся на интервале от  $v$  до  $v + \Delta v$ . На рисунке 3. 2. 3. данное значение выделено в виде столбика.

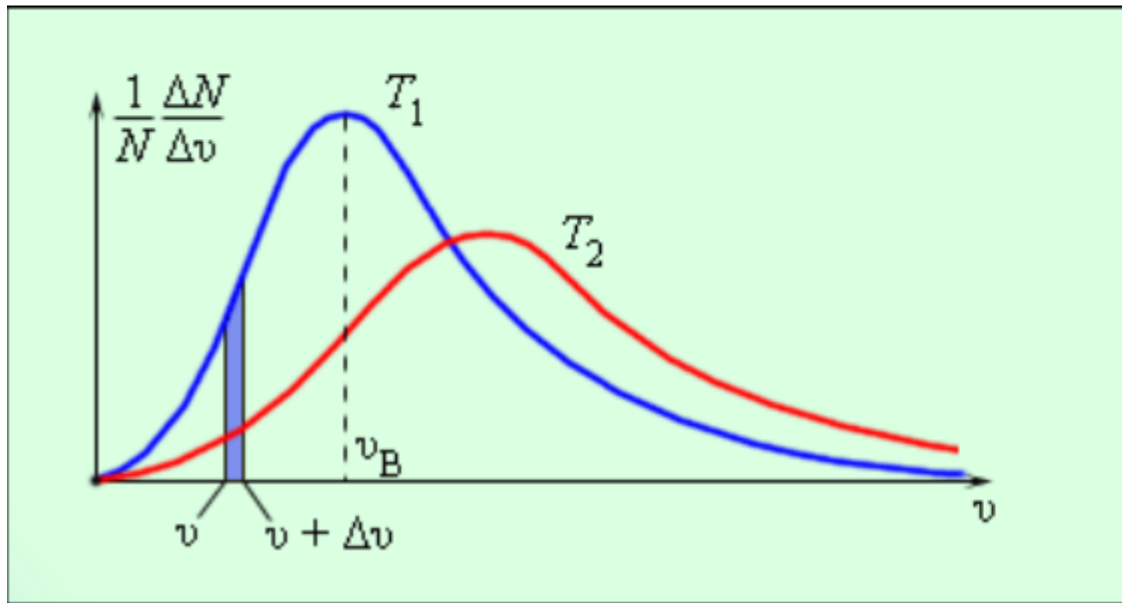
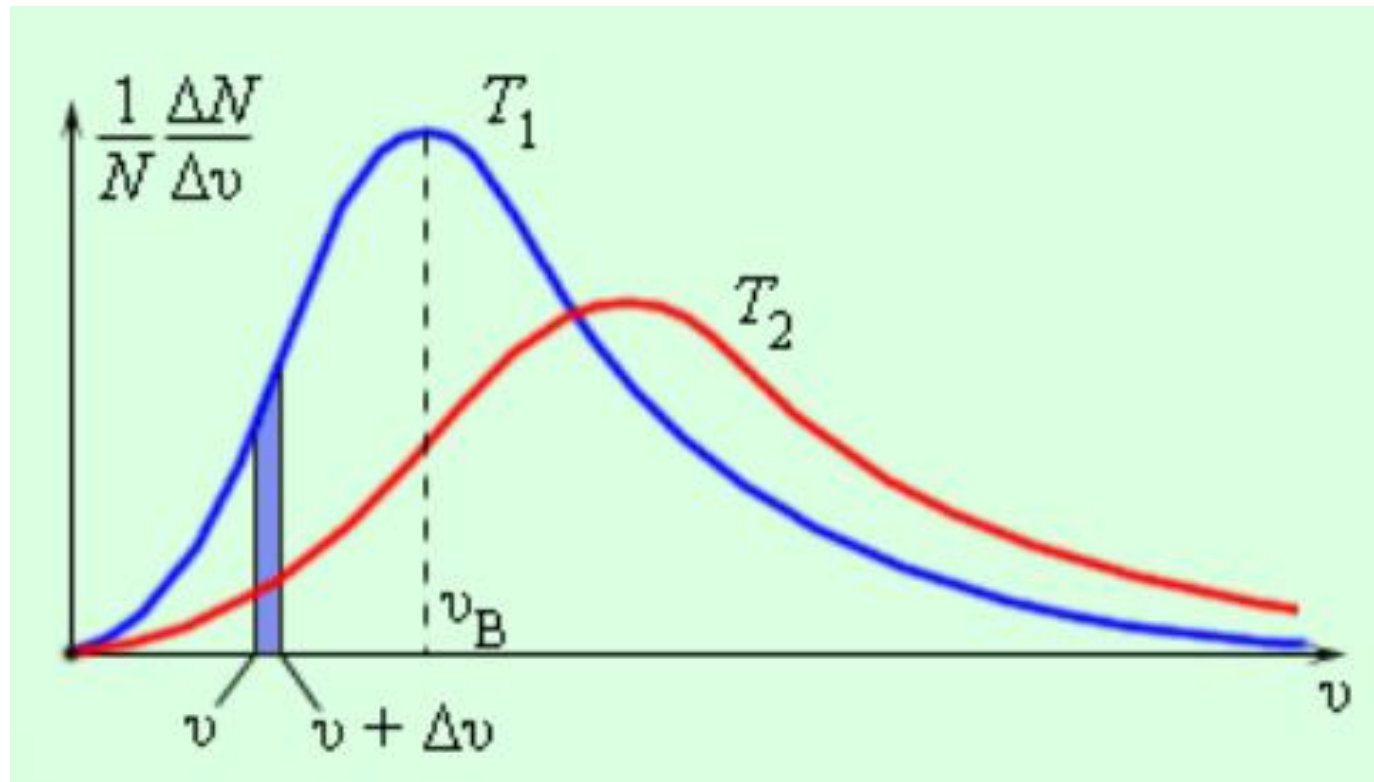


Рисунок 3. 2. 3. Распределение молекул по скоростям.  $T_2 > T_1$ .

### Определение 3

Характерные параметры распределения Максвелла – это вероятная скорость  $v_B$ , которая соответствует кривой распределения, и среднеквадратичная скорость  $v_{KB} = \sqrt{\overline{v^2}}$ , где  $\overline{v^2}$  обозначающие среднее значение квадрата скорости.

Если растет температура, тогда максимум кривой будет смещен в сторону больших скоростей, то есть  $v_B$  и  $v_{KB}$  увеличатся.



# Распределение Максвелла

Для записи формулы давления газа необходимо предположить, что все молекулы разделены на  $n_1, n_2, n_3$  группы с проекциями  $v_{x1}, v_{x2}, v_{x3}$ . Иначе говоря, записываем  $\sum_i n_i = n$ . Можно зафиксировать, как  $n_i m_0 v_{xi}^2$ . Тогда суммарное давление примет вид  $p = m_0 \sum_i n_i v_{xi}^2$ .

Данная сумма является суммой квадратов проекций  $v_x$  всех  $n$  молекул на единичном объеме газа. При делении выражения на  $n$  получим среднее значение квадратичной скорости проекции  $v_x$ . Запишем в виде  $\frac{1}{n} \sum_i n_i v_{xi}^2 = \overrightarrow{v_x^2}$ .

Другая интерпретация формулы давления газа  $p = n m_0 \overrightarrow{v_x^2}$ . Все направления векторов различные, потому среднее значение квадратов проекций на координатные оси равняется  $\overrightarrow{v_x^2} = \overrightarrow{v_y^2} = \overrightarrow{v_z^2} = \frac{1}{3} \overrightarrow{v^2}$ .

Формула для среднего давления газа на стенку сосуда обозначим, как

$$p = \overrightarrow{p} = \frac{1}{3} n m_0 \overrightarrow{v^2} = \frac{2}{3} n \frac{m_0 \overrightarrow{v^2}}{2} = \frac{2}{3} n \overrightarrow{E_k}.$$

$$p = \overrightarrow{p} = \frac{1}{3} n m_0 \overrightarrow{v^2} = \frac{2}{3} n \frac{m_0 \overrightarrow{v^2}}{2} = \frac{2}{3} n \overrightarrow{E_k}.$$

#### Определение 4

Из уравнения видна связь между  $p$  и  $m_0$  и количеством молекул  $n$ , средней квадратичной скоростью  $\overrightarrow{v^2}$  и средней кинетической энергией  $\overrightarrow{E_k}$  молекул. Такое уравнение получило название **уравнения молекулярно-кинетической теории газов**.

Отсюда следует, что давление газа – это две трети средней кинетической энергии, которое имеется в единице объема. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории газов или строения вещества содержит произведение количества молекул  $n$  на  $\overrightarrow{E_k}$ . Предположительно сосуд имеет газ неизменного объема  $V$ , тогда  $n = \frac{N}{V} = \text{const}$  ( $N$  - число молекул в сосуде). Изменение давления происходит пропорционально изменению кинетической энергии.

*The End*