ОБЪЕМЫ МНОГОГРАННИКОВ

ПОНЯТИЕ ОБЪЕМА

Тело называется **простым**, если его можно разбить на конечное число треугольных пирамид.

Для простых тел **объем** — это положительная величина, численное значение которой обладает следующими свойствами:

1. Равные тела имеют равные объемы.
2. Если тело разбито на части, являющиеся простыми телами, то объем этого тела равен сумме объемов его частей.
3. Объем куба, ребро которого равно единице длины, равен единице.

ОБЪЕМ ПРЯМУГОЛЬНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

объем прямоугольного параллелепипеда с линейными размерами a, b, c вычисляется по формуле $V = abc$.

ОБЬЕМ НАКЛОННОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

объем любого параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту.

ОБЬЕМ ПРИЗМЫ

объем любой призмы равен произведению площади ее основания на высоту.

РАВНОВЕЛИКИЕ ТЕЛА

Две треугольные пирамиды с равными площадями оснований и равными высотами равновелики.

ОБЪЕМ ПИРАМИДЫ

объем любой треугольной пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту:

$$V = \frac{1}{3}SH.$$

объем любой пирамиды равен одной трети произведения площади ее основания на высоту.

ОБЪЕМЫ ПОДОБНЫХ ТЕЛ

объемы двух подобных тел относятся как кубы их соответствующих линейных размеров.

ЗАДАЧИ

ЗАДАЧА 1

Если каждое ребро куба увеличить на 2 см, то его объем увеличится на 98 см^3. Чему равно ребро куба?

Решение.

Обозначим ребро куба через x, тогда $(x + 2)^3 - x^3 = 98$, т. е. $x^2 + 2x - 15 = 0$. Уравнение имеет два корня: $x = 3$, $x = -5$. Геометрический смысл имеет только положительный корень. Итак, ребро куба равно 3 см.

ЗАДАЧА 2

В прямом параллелепипеде стороны основания a и b образуют угол 30°. Боковая поверхность равна S. Найдите его объем.

Решение.

Обозначим высоту через x (рис. 167). Тогда

$$(2a + 2b)\,x = S.$$

Отсюда $x = \dfrac{S}{2(a+b)}$.

Площадь основания параллелепипеда равна $ab \sin 30° = \dfrac{ab}{2}$. Объем равен $\dfrac{abS}{4(a+b)}$.

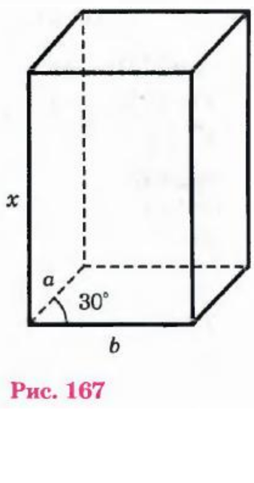

Рис. 167

ЗАДАЧА 3

В наклонной призме проведено сечение, перпендикулярное боковым ребрам и пересекающее все боковые ребра. Найдите объем призмы, если площадь сечения Q, а боковые ребра равны l.

Решение.

Плоскость проведенного сечения разбивает призму на две части (рис. 170). Подвергнем одну из них параллельному переносу, совмещающему основания призмы. При этом получим прямую призму, у которой основанием служит сечение исходной призмы, а высота равна l. Эта призма имеет тот же объем. Таким образом, объем исходной призмы равен Ql.

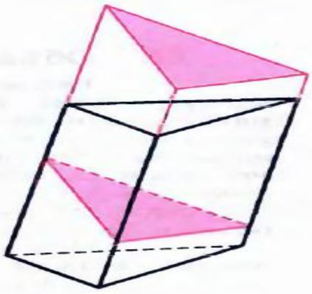

Рис. 170

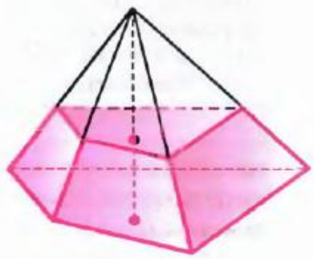

Рис. 173

ЗАДАЧА 4

Найдите объем усеченной пирамиды с площадями оснований Q_1 и Q_2 ($Q_1 > Q_2$) и высотой h.

Решение.

Дополним данную усеченную пирамиду до полной (рис. 173). Пусть x — ее высота. Объем усеченной пирамиды равен разности объемов двух полных пирамид: одной с площадью основания Q_1 и высотой x, другой с площадью основания Q_2 и высотой $x - h$.

Из подобия этих пирамид находим x:

$\frac{Q_1}{Q_2} = \left(\frac{x}{x-h}\right)^2$. Отсюда $x = \frac{h\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1} - \sqrt{Q_2}}$.

Объем усеченной пирамиды равен:

$$V = \frac{1}{3}\left[Q_1 \frac{h\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1} - \sqrt{Q_2}} - Q_2\left(\frac{h\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1} - \sqrt{Q_2}} - h\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{3}h\frac{Q_1\sqrt{Q_1} - Q_2\sqrt{Q_2}}{\sqrt{Q_1} - \sqrt{Q_2}} = \frac{1}{3}h\left(Q_1 + \sqrt{Q_1 Q_2} + Q_2\right).$$

ЗАДАНИЯ

ЗАДАЧА 1

Требуется установить резервуар для воды емкостью 10 $м^3$ на площадке размером $2{,}5 \times 1{,}75$ м, служащей для него дном. Найдите высоту резервуара.

ЗАДАЧА 2

Чугунная труба имеет квадратное сечение, ее внешняя ширина 25 см, толщина стенок 3 см. Какова масса одного погонного метра трубы (плотность чугуна 7,3 $г/см^3$)?

ЗАДАЧА 3

В прямом параллелепипеде стороны основания $2\sqrt{2}$ см и 5 см образуют угол 45°. Меньшая диагональ параллелепипеда равна 7 см. Найдите его объем.

ЗАДАЧА 4

Основание прямого параллелепипеда — ромб, площадь которого 1 $м^2$. Площади диагональных сечений 3 $м^2$ и 6 $м^2$. Найдите объем параллелепипеда.

ЗАДАЧА 5

Диагональ правильной четырехугольной призмы равна 3,5 см, а диагональ боковой грани 2,5 см. Найдите объем призмы.

ЗАДАЧА 6

В правильной шестиугольной призме площадь наибольшего диагонального сечения 4 $м^2$, а расстояние между двумя противоположными боковыми гранями 2 м. Найдите объем призмы.

ЗАДАЧА 7

Вычислите пропускную способность (в кубических метрах за 1 ч) водосточной трубы, сечение которой имеет вид равнобедренного треугольника с основанием 1,4 м и высотой 1,2 м. Скорость течения 2 м/с.

ЗАДАЧА 8

Основание пирамиды — равнобедренный треугольник со сторонами 6 см, 6 см и 8 см. Все боковые ребра равны 9 см. Найдите объем пирамиды.

ЗАДАЧА 9

Через середину высоты пирамиды проведена плоскость, параллельная основанию. В каком отношении она делит объем пирамиды?

ЗАДАЧА 10

Высота пирамиды h. На каком расстоянии от вершины пирамиды находится сечение, параллельное основанию и делящее ее объем пополам?