**Тематическая олимпиада по высшей математике**
**для студентов инженерных специальностей**
**ТОВМИС «Базис»,**
**24 ноября 2020 года.**

**1.** Пантелей безмятежно работал в цирке укротителем бобров, до того страшного момента, пока бобры не попросили его доказать, что если даны квадратные матрицы одного порядка такие, что $AB = A + B,$ то

$$|A - E| \cdot |B - E| = 1,$$

где $E$ – единичная матрица того же порядка.
Помогите Пантелею сохранить свой авторитет в глазах строптивых и опасных бобров.

**Решение.** Произведение определителей матриц равно определителю произведений этих матриц, следовательно, имеем

$$|A - E||B - E| = |(A - E) \cdot (B - E)|.$$

Рассмотрим матрицу
$(A - E) \cdot (B - E) = AB - AE - EB + E^2 = AB - A - B + E = AB - (A + B) + E.$
С учётом условия задачи

$$(A - E) \cdot (B - E) = E.$$

Следовательно,

$$|A - E| \cdot |B - E| = |(A - E) \cdot (B - E)| = |E| = 1.$$

**2.** Помогите художнику Корнею изобразить область комплексной плоскости, заданную условием.

$$\frac{1}{4} < Re\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) + Im\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) < \frac{1}{2}.$$

**Решение.** Пусть

$$z = x + iy \to \frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{x - iy} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

$$\frac{1}{4} < \frac{x + y}{x^2 + y^2} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x + y}{x^2 + y^2} < \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{x + y}{x^2 + y^2} > \dfrac{1}{4}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 < 4x + 4y, \\ x^2 + y^2 > 2x + 2y, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 2)^2 < 8, \\ (x - 1)^2 + (y - 1)^2 > 2. \end{cases}$$

**Ответ:** кольцевая область между окружностями с центром в точке (2, 2) и радиусом $\sqrt{8}$ и центром в точке (1, 1) и радиусом $\sqrt{2}$, исключая граничные линии.

**3.** Чтобы получить зачет Матильда должна вычислить $(\vec{d}, \vec{f}, \vec{g})$, где

$$\vec{d} = 2020\vec{a} - 2021\vec{b}, \vec{f} = 2021\vec{b} - 2022\vec{c}, \vec{g} = 2022\vec{c} - 2020\vec{a}.$$

Не дайте красавице Матильде «вылететь» из любимого вуза.

**Решение.** Найдем сумму данных векторов:

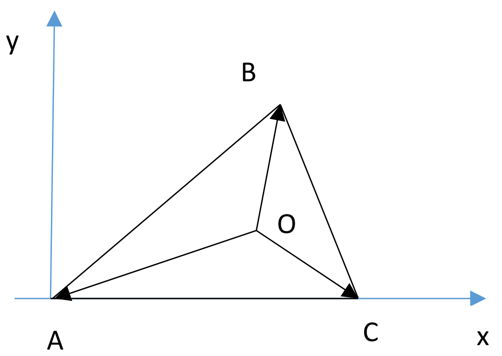
$\vec{d} + \vec{f} + \vec{g} = 2020\vec{a} - 2021\vec{b} + 2021\vec{b} - 2022\vec{c} + 2022\vec{c} - 2020\vec{a}$=0.

Следовательно, данные векторы являются компланарными, а для них смешанное произведение равно нулю.

**Ответ:** 0.

**4.** Еремей с великим ужасом обнаружил внутри треугольника $ABC$ коварную точку $O$ такую, что $\overline{OA} + \overline{OB} + \gamma\overline{OC} = 0$, где $\gamma$ – отношение площадей треугольников $AOC$ и $ABC$. Верните Еремею душевное равновесие и найдите $\gamma$.

**Решение.**




Зададим систему координат, совместив начало координат с вершиной A и направив ось Ox по стороне AC.

$A(0,0), B(x_B, y_B), C(x_C, 0), O(x_O, y_O)$.

$\gamma = \frac{S_{AOC}}{S_{ABC}}$, $\gamma > 0$. Очевидно, $\gamma$ будет равно отношению высот треугольников $AOC$ и $ABC$, то есть $\gamma = \left|\frac{y_O}{y_B}\right|$. (1)

$$\overline{OA} + \overline{OB} + \gamma\overline{OC} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -x_0 + (x_B - x_O) + \gamma(x_C - x_O) = 0, \\ -y_0 + (y_B - y_O) + \gamma(0 - y_O) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

(2)$\Rightarrow \frac{y_B}{y_o} = 2 + \gamma$. (3).

Из (1) и (3) получаем: $\pm\frac{1}{\gamma} = 2 + \gamma$, откуда $\gamma_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$, $\gamma_3 = -1$.

Так как по условию $\gamma > 0$, то получаем $\gamma = \sqrt{2} - 1$.

**Ответ:** $\sqrt{2} - 1$.

**5.** Просто решите задачу. Точки $A(-4,-1,2)$ и $B(2,5,-16)$ – вершины треугольника ABC. Середина стороны AC лежит на прямой $l$: $\frac{x}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z-1}{3}$, а середина стороны BC лежит на плоскости $\alpha: 3x - 4y + z + 2 = 0$. Найти площадь треугольника ABC.

Решение. Пусть $C(x_0, y_0, z_0)$.

Пусть M – середина стороны AC, тогда $M\left(\frac{x_0-4}{2}, \frac{y_0-1}{2}, \frac{z_0+2}{2}\right)$.

Параметрические уравнения прямой $l$: $\begin{cases} x = 2t, \\ y = 0, \\ z = 3t + 1. \end{cases}$

$$M \in l \Longrightarrow \begin{cases} \frac{x_0-4}{2} = 2t, \\ \frac{y_0-1}{2} = 0, \\ \frac{z_0+2}{2} = 3t + 1, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_0 = 4t + 4, \\ y_0 = 1, \\ z_0 = 6t. \end{cases} \quad (1)$$

Пусть N – середина стороны BC, тогда $N\left(\frac{x_0+2}{2}, \frac{y_0+5}{2}, \frac{z_0-16}{2}\right)$.

$M \in l \Longrightarrow \frac{3}{2}(x_0 + 2) - 2(y_0 + 5) + \frac{1}{2}(z_0 - 16) + 2 = 0.$ (2)

Подставляя (1) в (2), получаем $t = 1$.

Таким образом, $C(8, 1, 6)$.

Площадь треугольника ABC:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|\overline{AB} \times \overline{AC}| = \frac{1}{2} mod \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 6 & 6 & -18 \\ 12 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\sqrt{60^2 + 240^2 + 60^2} = 90\sqrt{2}.$$

**Ответ**: $90\sqrt{2}$.

**6.** После нескольких дней мучительных поисков Корней и Матвей доказали, что если $ab + bc + ac = 0$, то

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}^2 = (a^2 + b^2 + c^2)^3.$$

Повторите их «подвиг».

**Решение**. Зададим векторы $\bar{x} = (a, b, c)$, $\bar{y} = (b, c, a)$, $\bar{z} = (c, a, b)$.

$\bar{x} \cdot \bar{y} + \bar{y} \cdot \bar{z} + \bar{x} \cdot \bar{z} = ab + bc + ac = 0 \Longrightarrow \bar{x} \perp \bar{y} \perp \bar{z}.$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}^2 = (\bar{x}\bar{y}\bar{z})^2 = V^2_{\text{пар−да}} = (|\bar{x}||\bar{y}||\bar{z}|)^2 = (a^2 + b^2 + c^2)^3.$$