**1.** Верно ли, что $2021(2020!e - [2020!e]) < \pi$? Здесь $[a]$ обозначает целую часть $a$.

*Решение.* По формуле Тейлора

$$n!e = n! + n! + \frac{n!}{2} + ... + \frac{e^\theta}{n+1},$$

где $0 < \theta < 1$. В правой части все слагаемые, кроме последнего - целые числа, а последнее (так как $\theta \in (0,1)$) меньше единицы при $n \geq 2$. Поэтому $n!e - [n!e] = \frac{e^\theta}{n+1}$. Значит, $2021(2020!e - [2020!e]) < e^\theta < e < \pi$.

**2.** Найдите все непрерывные функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие уравнению

$$f(x + 2020y) = f(x^2 + y^2) f(\cos x \cdot \cos y)$$

для любых $x, y \in \mathbb{R}$.

*Решение.* Правая часть симметрична относительно $x, y$, значит, и левая симметрична, то есть $f(x + 2020y) = f(y + 2020x)$. Подстановкой $y = -2020x$ убеждаемся, что $f(0) = f((1 - 2020^2)x)$ для любого $x$. Значит, $f(x) = C = const$. Подставляя в исходное уравнение, находим $C = C^2$. Значит, $C = 0$ или $C = 1$. Ответ: $f(x) \equiv 0$ или $f(x) \equiv 1$.

**3.** Пусть $f : [0,1] \to [0,1]$ непрерывная функция и $\int_0^1 f^{1011}(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Докажите, что $\sum\limits_{i=1}^{2020} \int_0^1 f^i(x)\,\mathrm{d}x \geq 2020$.

*Решение.*

$\sum\limits_{i=1}^{2020} \int_0^1 f^i(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum\limits_{i=1}^{2020} f^i(x)\,\mathrm{d}x \underset{\text{AM-GM}}{\geq} \int_0^1 2020 \cdot \sqrt[2020]{f^{\frac{2020\cdot 2021}{2}}}\,\mathrm{d}x = 2020 \int_0^1 f^{\frac{2021}{2}}\,\mathrm{d}x \underset{0\leq f\leq 1}{\geq} 2020 \int_0^1 f^{1011}\,\mathrm{d}x = 2020$.

Второе решение. Поскольку функция принимает значения от 0 до 1, и интеграл $\int_0^1 f^{1011}(x)\,\mathrm{d}x = 1$, то $f(x) \equiv 1$, поэтому $\sum\limits_{i=1}^{2020} \int_0^1 f^i(x)\,\mathrm{d}x = \sum\limits_{i=1}^{2020} 1 = 2020$.

**4.** Пусть $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ непрерывная функция и $\int\limits_0^1 x^k f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ для всех $k = 0, \ldots, n$. Доказать, что $f(x)$ имеет $n+1$ корень в $(0,1)$.

*Решение.* Докажем по индукции, что $f$ имеет по крайней мере $n+1$ корень в $(0,1)$.

База. $n = 0$. $\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, тогда очевидно, что $f(x) = 0$ для некоторого $x$.

Индукционный переход $n \to n+1$. Пусть $g(x) = \int\limits_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Ясно, что $g(0) = g(1) = 0$. Интегрируя по частям, находим: $0 = \int\limits_0^1 x^k f(x)\,\mathrm{d}x = -k \int\limits_0^1 x^{k-1} g(x)\,\mathrm{d}x$. По индукционному предположению $g(x)$ имеет $n+1$ корень на $(0,1)$. Так как 0 и 1 тоже корни $g(x)$ (то есть всего корней $n+3$, ее производная $f(x)$ имеет $n+2$ на $(0,1)$.

**5.** Гусеница упала на седло $2z = x^2 - y^2$ в точку $(0,0,0)$. Видя собирающегося сесть в седло наездника и желая избежать контакта с определенной частью его тела, она стремится переползти в точку $(2,0,2)$. Однако, от страха она может ползти только по прямой линии, то есть ее траектория может состоять только из конечного числа отрезков прямых. Как ей следует двигаться?

*Решение.* Седло имеет две системы прямолинейных образующих.

$$\begin{cases} \alpha(x+y) = 2\beta z, \\ \beta(x-y) = \alpha. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha(x-y) = 2\beta z, \\ \beta(x+y) = \alpha. \end{cases}$$

Гусенице следует сначала ползти по прямой из одного семейства, проходящей через $(0,0,0)$ до пересечения ее с прямой из второго семейства, проходящей через $(2,0,2)$, и по этой второй прямой завершить путь. Например, можно сначала из $(0,0,0)$ двигаться по прямой

$$\begin{cases} y = x, \\ z = 0, \end{cases}$$

до точки $(1,1,0)$. Затем по прямой

$$\begin{cases} x - y = z, \\ x + y = 2, \end{cases}$$

до точки $(2,0,2)$

**6.** Для произвольного натурального $n$ найдите сумму $\sum\limits_{x+y+z+t=n} 2^{x+2y+3z+4t}$, где $x,y,z,t$ — целые неотрицательные числа. Ответ должен содержать не более четырех слагаемых.

*Решение.*

Пусть

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n, \quad U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^n, \quad V(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 8^n x^n, \quad W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 16^n x^n.$$

Тогда при $|x| < \frac{1}{16}$ имеем

$$T(x)U(x)V(x)W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{a+b+c+d=n} 2^x 4^b 8^c 16^d \right) x^n.$$

Легко найти суммы $T(x) = \frac{1}{1-2x}$, $U(x) = \frac{1}{1-4x}$, $V(x) = \frac{1}{1-8x}$ и $W(x) = \frac{1}{1-16x}$. Значит,

$$T(x)U(x)V(x)W(x) = \frac{1}{(1-2x)(1-4x)(1-8x)(1-16x)} =$$

$$-\frac{1}{12}\frac{1}{1-2x} + \frac{2}{3}\frac{1}{1-4x} - \frac{8}{3}\frac{1}{1-8x} + \frac{64}{21}\frac{1}{1-6x} =$$

$$-\frac{1}{12}T(x) + \frac{2}{3}U(x) - \frac{8}{3}V(x) + \frac{64}{21}W(x).$$

Соответственно,

$$\sum_{a+b+c+d=n} 2^x 4^b 8^c 16^d = -\frac{1}{12}2^n + \frac{2}{3}4^n - \frac{8}{3}8^n + \frac{64}{21}16^n.$$

**7.** Пусть $X$ вещественная матрица размера $n \times n$, такая, что $X + X^T = I_n$ ($I_n$ — единичная матрица, $X^T$ — транспонированная матрица). Докажите, что $\det X \geq \frac{1}{2^n}$.

*Решение.* Пусть $Y = X - \frac{1}{2}I_n$. Тогда $Y = -Y^T$. Так как, $Y$ вещественная антисимметричная матрица, ее собственные значения чисто мнимые: $ia$. Тогда собственные значения $X$ таковы $\frac{1}{2} + ia$. В силу вещественности матрицы, собственное значение либо $\frac{1}{2}$, либо $\frac{1}{2} + ia$, но тогда есть и собственное значение $\frac{1}{2} - ia$. При переходе к базису из собственных векторов (для антисимметричной матрицы такой базис существует) определитель матрицы не меняется. В базисе из собственных векторов определитель есть произведение собственных чисел. Поскольку $(\frac{1}{2} + ia)(\frac{1}{2} - ia) = \frac{1}{2^2} + a^2)$, получаем $\det X \geq \frac{1}{2^n}$.

**8.** Найдите все ограниченные функции $f \in C^1(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$, удовлетворяющие уравнению $f'(x) = f(x-1)$ для всех $x$.

*Решение.* Очевидно, что $f \in C^2(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$, так как по уравнению $f'$ есть непрерывно-дифференцируемая функция. Пусть $M = \sup_{\mathbb{R}} |f|$. Покажем, что $M = 0$. От противного.

Допустим, что $M > 0$. Рассмотрим такое $x$, что $|f(x)| > 3M/4$. По формуле Тейлора существует такое $c \in (x, x+1)$, что $f(x) = f(x+1) + f'(x+1)(x-(x+1)) + \frac{f''(c)}{2}(x-(x+1))^2$. Значит, $f''(c) = 4f(x) - 2f(x+1)$. Но $f''(c) = f'(c-1) = f(c-2)$. Поэтому $f(c-2) = 4f(x) - 2f(x+1)$.

Из этого получаем, что $|f(c-2)| = |4f(x) - 2f(x+1)| \geq 4|f(x)| - 2|f(x+1)| > 3M - 2M = M$. Противоречие. Значит, $M = 0$.

**9.** Пусть $a_1 = \frac{1}{2}$ и $a_{n+1} = a_n - a_n^2$. Докажите, что следующий предел существует: $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{a_n} - n - \ln n)$.

*Решение.* Обозначим $b_n = \frac{1}{a_n}$ и $c_n = b_n - n - \ln n$

$b_{n+1} = \frac{1}{a_n - a_n^2} = \frac{b_n^2}{b_n - 1} = b_n + 1 + \frac{1}{b_n - 1}$. Таким образом, последовательность $b_n$ строго возрастает. По индукции проверяется, что $n + 2 < b_n < n + \ln n + 2$.

Тогда $c_{n+1} - c_n = b_n + 1 + \frac{1}{1 - b_n} - (n+1) - \ln(n+1) - (b_n - n - \ln n) = \frac{1}{b_n - 1} - (\ln(n+1) - \ln n)$. По теореме о среднем $\ln(n+1) - \ln n = f'(n+\theta) = \frac{1}{n+\theta}$, $0 < \theta < 1$, то есть $\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}$. Учитывая, что $\frac{1}{n + \ln n + 1} < \frac{1}{b_n - 1} < \frac{1}{n+1}$, получаем $c_{n+1} - c_n < 0$, то есть $c_n$ убывающая.

Докажем, что $c_n$ ограничена снизу. Имеем $0 < c_k - c_{k+1} = \ln(k+1) - \ln k - \frac{1}{b_k - 1} < \frac{1}{k} - \frac{1}{k + \ln k + 1} < \frac{\ln k + 1}{k^2} < \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{k^2}$. Итак, $0 < c_k - c_{k+1} < \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{k^2}$. Складывая неравенства для всех $k$ до $n-1$, получаем $0 < c_3 - c_n < \sum\limits_{k=3}^{n-1}\left(\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{k^2}\right)$. Так как оба ряда в правой части неравенства сходятся, для некоторого $S$ имеем $0 < c_3 - c_n < S$, то есть $c_n$ ограничена снизу.