ОБЪЕМЫ И ПОВЕРХНОСТИ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

ОБЪЕМ ЦИЛИНДРА

Если тело простое, т. е. допускает разбиение на конечное число треугольных пирамид, то его объем равен сумме объемов этих пирамид. Для произвольного тела объем определяется следующим образом.

Данное тело имеет объем V, если существуют содержащие его простые тела и содержащиеся в нем простые тела с объемами, сколь угодно мало отличающимися от V.

объем цилиндра равен произведению площади основания на высоту.

ОБЪЕМ КОНУСА

объем конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту.

ОБЪЕМ ШАРА

объем шара радиуса R вычисляется по формуле

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

ОБЪЕМ ШАРОВОГО СЕГМЕНТА И СЕКТОРА

Шаровым сегментом называется часть шара, отсекаемая от него плоскостью (рис. 183).

Объем шарового сегмента вычисляется по формуле

$$V = \pi H^2\left(R - \frac{H}{3}\right),$$

где R — радиус шара, а H — высота шарового сегмента.

Эта формула сначала выводится для случая, когда сегмент меньше полушара ($H < R$). При этом доказательство такое же, как для полушара. Разница только в том, что вместо полушара берется шаровой сегмент.

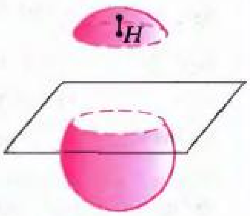

Рис. 183

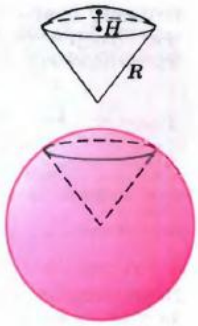

Рис. 184

Шаровым сектором называется тело, которое получается из шарового сегмента и конуса следующим образом. В случае когда сегмент меньше полушара, шаровой сектор получается дополнением этого сегмента конусом с тем же основанием, которое у сегмента, и вершиной в центре шара (рис. 184).

В случае сегмента большего полушара шаровой сектор получается из этого сегмента удалением из него конуса, у которого основанием служит основание сегмента, а вершина в центре шара.

Объем шарового сектора определяется по формуле

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 H,$$

где R — радиус шара, а H — высота соответствующего шарового сегмента.

Эта формула получается с помощью формул для объемов шарового сегмента и конуса.

ПЛОЩАДЬ БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЦИЛИНДРА

площадь боковой поверхности цилиндра вычисляется по формуле

$$S = CH = 2\pi RH,$$

где R — радиус цилиндра, а H — его высота.

Если боковую поверхность цилиндра с радиусом основания R и высотой H разрезать по образующей и без деформаций развернуть на плоскость, то получится прямоугольник, основание которого равно $2\pi R$, а высота — H. Площадь развертки боковой поверхности цилиндра вычисляется по формуле $S = 2\pi RH$.

ПЛОЩАДЬ БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ КОНУСА

площадь боковой поверхности конуса вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2}Cl = \pi Rl,$$

где R — радиус основания конуса, а l — длина образующей.

Аналогично для площади боковой поверхности усеченного конуса с радиусами оснований R_1, R_2 и образующей l получается формула

$$S = \pi(R_1 + R_2)l.$$

ПЛОЩАДЬ СФЕРЫ

площадь сферы радиуса R вычисляется по формуле

$$S = 4\pi R^2.$$

Аналогично определяется площадь сферической части поверхности шарового сектора, т. е. площадь сферического сегмента, для нее получается формула

$$S = 2\pi RH,$$

где H — высота сегмента.

ЗАДАЧИ

Задача (15).

Найдите объем усеченного конуса, у которого радиусы оснований равны R_1 и R_2 ($R_2 < R_1$), а высота h.

Решение.

Дополним данный усеченный конус до полного (рис. 180). Пусть x — его высота. Объем усеченного конуса равен разности объемов двух полных конусов: одного с радиусом основания R_1 и высотой x, другого с радиусом основания R_2 и высотой $x - h$.

Из подобия конусов находим x:

$$\frac{x}{x-h} = \frac{R_1}{R_2},\ x = \frac{hR_1}{R_1 - R_2}.$$

Объем усеченного конуса равен:

$$V = \frac{1}{3}\left[\pi R_1^2 \frac{hR_1}{R_1 - R_2} - \pi R_2^2 \left(\frac{hR_1}{R_1 - R_2} - h\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\pi h \frac{R_1^3 - R_2^3}{R_1 - R_2} = \frac{1}{3}\pi h\,(R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2).$$

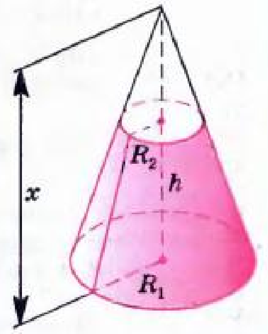

Рис. 180

ЗАДАНИЯ

ЗАДАЧА 1

25 м медной проволоки имеют массу 100,7 г. Найдите диаметр проволоки (плотность меди 8,94 г/см^3).

ЗАДАЧА 2

Насос, подающий воду в паровой котел, имеет два водяных цилиндра. Диаметры цилиндров 80 мм, а ход поршня 150 мм. Чему равна часовая производительность насоса, если каждый поршень делает 50 рабочих ходов в минуту?

ЗАДАЧА 3

В цилиндр вписана правильная треугольная призма, а в призму вписан цилиндр. Найдите отношение объемов цилиндров.

ЗАДАЧА 4

Осевым сечением конуса является равнобедренный прямоугольный треугольник, площадь которого 9 м^2. Найдите объем конуса.

ЗАДАЧА 5

Стог сена имеет форму цилиндра с коническим верхом. Радиус его основания 2,5 м, высота 4 м, причем цилиндрическая часть стога имеет высоту 2,2 м. Плотность сена 0,03 г/см^3. Определите массу стога сена.

ЗАДАЧА 6

Сосновое бревно длиной 15,5 м имеет диаметры концов 42 см и 25 см. Какую ошибку (в процентах) совершают, когда вычисляют объем бревна, умножая его длину на площадь поперечного сечения в середине бревна?

ЗАДАЧА 7

Усеченный конус, у которого радиусы оснований 4 см и 22 см, и равновеликий цилиндр имеют одну и ту же высоту. Чему равен радиус основания этого цилиндра?

ЗАДАЧА 8

Чугунный шар регулятора имеет массу 10 кг. Найдите диаметр шара (плотность чугуна 7,2 г/см^3).

ЗАДАЧА 9

Требуется переплавить в один шар два чугунных шара с диаметрами 25 см и 35 см. Найдите диаметр нового шара.

ЗАДАЧА 10

Имеется кусок свинца массой 1 кг. Сколько шариков диаметром 1 см можно отлить из куска (плотность свинца 11,4 г/см^3)?

ЗАДАЧА 11

Из деревянного цилиндра, высота которого равна диаметру основания, выточен наибольший шар. Сколько процентов материала сточено?

ЗАДАЧА 12

Плоскость, перпендикулярная диаметру шара, делит его на части 3 см и 9 см. На какие части делится объем шара?

ЗАДАЧА 13

Какую часть объема шара составляет объем шарового сегмента, у которого высота равна 0,1 диаметра шара?

ЗАДАЧА 14

Два равных шара расположены так, что центр одного лежит на поверхности другого. Как относится объем общей части шаров к объему целого шара?

ЗАДАЧА 15

Диаметр шара, равный 30 см, является осью цилиндра, у которого радиус основания равен 12 см. Найдите объем части шара, заключенной внутри цилиндра.

ЗАДАЧА 16

Поверхность тела, образуемого вращением квадрата около стороны, равновелика поверхности шара, имеющего радиусом сторону квадрата. Докажите.

ЗАДАЧА 17

Радиус шара 15 см. Какую площадь имеет часть его поверхности, видимая из точки, удаленной от центра на 25 см (рис. 190)?

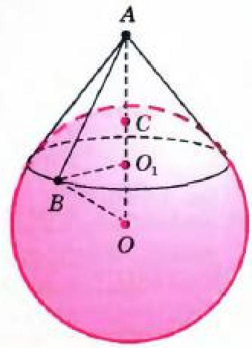

Рис. 190

ЗАДАЧА 18

Шар радиуса 10 см цилиндрически просверлен по оси. Диаметр отверстия 12 см. Найдите полную поверхность тела.