ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 1 КУРСА
Преподаватель Гречушникова Ю.С.

Изучите лекционный материал.

ТЕМА 4. ОБЪЕМЫ И ПОВЕРХНОСТИ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

ОБЪЕМ ЦИЛИНДРА

Если тело простое, т. е. допускает разбиение на конечное число треугольных пирамид, то его объем равен сумме объемов этих пирамид. Для произвольного тела объем определяется следующим образом.

Данное тело имеет объем V, если существуют содержащие его простые тела и содержащиеся в нем простые тела с объемами, сколь угодно мало отличающимися от V.

объем цилиндра равен произведению площади основания на высоту.

ОБЪЕМ КОНУСА

объем конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту.

ОБЪЕМ ШАРА

объем шара радиуса R вычисляется по формуле

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

ОБЪЕМ ШАРОВОГО СЕГМЕНТА И СЕКТОРА

Шаровым сегментом называется часть шара, отсекаемая от него плоскостью (рис. 183).

Объем шарового сегмента вычисляется по формуле

$$V = \pi H^2\left(R - \frac{H}{3}\right),$$

где R — радиус шара, а H — высота шарового сегмента.

Эта формула сначала выводится для случая, когда сегмент меньше полушара ($H < R$). При этом доказательство такое же, как для полушара. Разница только в том, что вместо полушара берется шаровой сегмент.

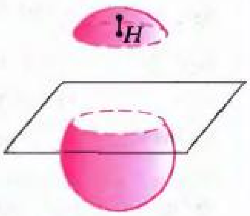

Рис. 183

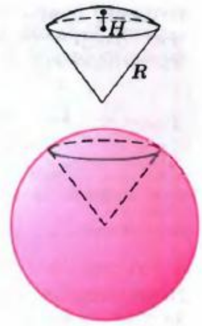

Рис. 184

Шаровым сектором называется тело, которое получается из шарового сегмента и конуса следующим образом. В случае когда сегмент меньше полушара, шаровой сектор получается дополнением этого сегмента конусом с тем же основанием, которое у сегмента, и вершиной в центре шара (рис. 184).

В случае сегмента большего полушара шаровой сектор получается из этого сегмента удалением из него конуса, у которого основанием служит основание сегмента, а вершина в центре шара.

Объем шарового сектора определяется по формуле

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 H,$$

где R — радиус шара, а H — высота соответствующего шарового сегмента.

Эта формула получается с помощью формул для объемов шарового сегмента и конуса.

ПЛОЩАДЬ БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЦИЛИНДРА

площадь боковой поверхности цилиндра вычисляется по формуле

$$S = CH = 2\pi RH,$$

где R — радиус цилиндра, а H — его высота.

Если боковую поверхность цилиндра с радиусом основания R и высотой H разрезать по образующей и без деформаций развернуть на плоскость, то получится прямоугольник, основание которого равно $2\pi R$, а высота — H. Площадь развертки боковой поверхности цилиндра вычисляется по формуле $S = 2\pi RH$.

ПЛОЩАДЬ БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ КОНУСА

площадь боковой поверхности конуса вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2}Cl = \pi Rl,$$

где R — радиус основания конуса, а l — длина образующей.

Аналогично для площади боковой поверхности усеченного конуса с радиусами оснований R_1, R_2 и образующей l получается формула

$$S = \pi(R_1 + R_2)l.$$

ПЛОЩАДЬ СФЕРЫ

площадь сферы радиуса R вычисляется по формуле

$$S = 4\pi R^2.$$

Аналогично определяется площадь сферической части поверхности шарового сектора, т. е. площадь сферического сегмента, для нее получается формула

$$S = 2\pi RH,$$

где H — высота сегмента.

Изучите пример решения задачи

ЗАДАЧА 1

Найдите объем усеченного конуса, у которого радиусы оснований равны R_1 и R_2 ($R_2 < R_1$), а высота h.

Решение.

Дополним данный усеченный конус до полного (рис. 180). Пусть x — его высота. Объем усеченного конуса равен разности объемов двух полных конусов: одного с радиусом основания R_1 и высотой x, другого с радиусом основания R_2 и высотой $x - h$.

Из подобия конусов находим x:

$$\frac{x}{x-h} = \frac{R_1}{R_2}, \; x = \frac{hR_1}{R_1 - R_2}.$$

Объем усеченного конуса равен:

$$V = \frac{1}{3}\left[\pi R_1^2 \frac{hR_1}{R_1 - R_2} - \pi R_2^2 \left(\frac{hR_1}{R_1 - R_2} - h\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\pi h \frac{R_1^3 - R_2^3}{R_1 - R_2} = \frac{1}{3}\pi h \left(R_1^2 + R_1R_2 + R_2^2\right).$$

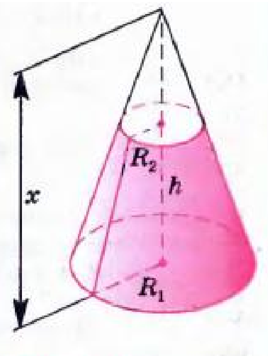

Рис. 180

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Атанасян Л.С. Геометрия. 10-11 класс. / Учебник. - Москва, Просвещение, 2019. - 287 стр.
2. Погорелов А.В. Геометрия. 10-11 класс. / Учебник. - Москва, Просвещение, 2014. - 175 стр.