Лекционный материал для самостоятельной работы по дисциплине «Математика»

Преподаватель Гречушникова Ю.С.
Группы СВ-11к, СМ-1

Лекция №5

Изучите лекционный материал и выполните практические задания

ТЕМА: ПРОИЗВОДНАЯ

Прочитайте пункты 12-17 (стр. 97-124) параграфа 4 (Производная) в учебнике и выполните практические задания.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Алгебра и начала математического анализа: учебник для 10-11 классов общеобразовательных учреждений /Под ред. А.Н. Колмогорова. - М., Просвещение, 2008. - 384 с.

ТЕМА: СИММЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИММЕТРИИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Понятие преобразования для фигур в пространстве определяется так же, как и на плоскости. Так же, как и на плоскости, определяются преобразования симметрии относительно точки и прямой.

Кроме симметрий относительно точки и прямой в пространстве, рассматривают преобразование симметрии относительно плоскости. Это преобразование состоит в следующем (рис. 72). Пусть α — произвольная фиксированная плоскость. Из точки X фигуры опускаем перпендикуляр XA на плоскость α и на его продолжении за точку A откладываем отрезок AX', равный XA. Точка X' называется **симметричной** точке X относительно плоскости α, а преобразование, которое переводит точку X в симметричную ей точку X', называется **преобразованием симметрии относительно плоскости** α.

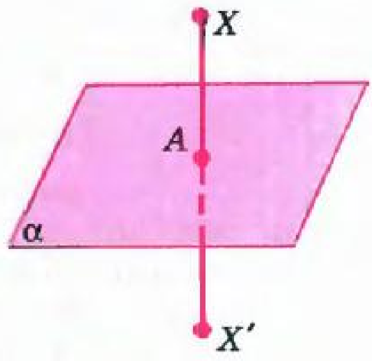

Рис. 72

Если точка X лежит в плоскости α, то считается, что точка X переходит в себя. Если преобразование симметрии относительно плоскости α переводит фигуру в себя, то фигура называется **симметричной относительно плоскости** α, а плоскость α называется **плоскостью симметрии** этой фигуры.

2. СИММЕТРИЯ В ПРИРОДЕ И НА ПРАКТИКЕ

Симметрия широко используется на практике, в строительстве и технике (рис. 73).

Симметрия широко распространена в природе. Ее можно наблюдать в форме листьев и цветов растений, в расположении различных органов животных, в форме кристаллических тел (рис. 74).

Рис. 74

3. ДВИЖЕНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ

Движение в пространстве определяется так же, как и на плоскости. А именно: **движением** называется преобразование, при котором сохраняются расстояния между точками.

Дословно так же, как и для движения на плоскости, доказывается, что при движении в пространстве прямые переходят в прямые, полупрямые — в полупрямые, отрезки — в отрезки и сохраняются углы между полупрямыми.

Новым свойством движения в пространстве является то, что

движение переводит плоскости в плоскости.

Докажем это свойство. Пусть α — произвольная плоскость (рис. 75). Отметим на ней любые три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой. При движении они перейдут в три точки A', B', C', также не лежащие на одной прямой. Проведем через них плоскость α'.

Докажем, что при рассматриваемом движении плоскость α переходит в плоскость α'.

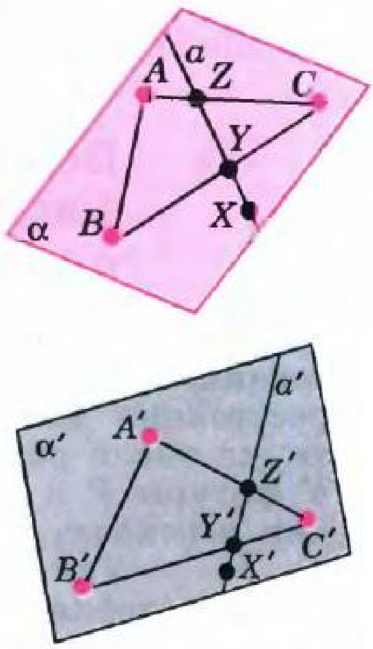

Рис. 75

Пусть X — произвольная точка плоскости α. Проведем через нее какую-нибудь прямую a в плоскости α, пересекающую треугольник ABC в двух точках Y и Z. Прямая a перейдет при движении в некоторую прямую a'. Точки Y и Z прямой a перейдут в точки Y' и Z', принадлежащие треугольнику $A'B'C'$, а значит, плоскости α'. Итак, прямая a' лежит в плоскости α'. Точка X при движении переходит в точку X' прямой a', а значит, и плоскости α', что и требовалось доказать.

В пространстве, так же как и на плоскости, две фигуры называются **равными**, если они совмещаются движением.

4. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС В ПРОСТРАНСТВЕ

Параллельным переносом в пространстве называется такое преобразование, при котором произвольная точка $(x;\ y;\ z)$ фигуры переходит в точку $(x + a;\ y + b;\ z + c)$, где числа a, b, c одни и те же для всех точек $(x;\ y;\ z)$. Параллельный перенос в пространстве задается формулами

$$x' = x + a,\ y' = y + b,\ z' = z + c,$$

выражающими координаты x', y', z' точки, в которую переходит точка $(x;\ y;\ z)$ при параллельном переносе. Так же как и на плоскости, доказываются следующие свойства параллельного переноса:

1. Параллельный перенос есть движение.
2. При параллельном переносе точки смещаются по параллельным (или совпадающим) прямым на одно и то же расстояние.
3. При параллельном переносе каждая прямая переходит в параллельную ей прямую (или в себя).
4. Каковы бы ни были точки A и A', существует единственный параллельный перенос, при котором точка A переходит в точку A'.

Новым для параллельного переноса в пространстве является следующее свойство:

5. При параллельном переносе в пространстве каждая плоскость переходит либо в себя, либо в параллельную ей плоскость.

Действительно, пусть α — произвольная плоскость (рис. 76). Проведем в этой плоскости две пересекающиеся прямые a и b. При параллельном переносе прямые a и b переходят либо в себя, либо в параллельные прямые a' и b'. Плоскость α переходит в некоторую плоскость α', проходящую через прямые a' и b'. Если плоскость α' не совпадает с α, то по теореме 2.4 она параллельна α, что и требовалось доказать.

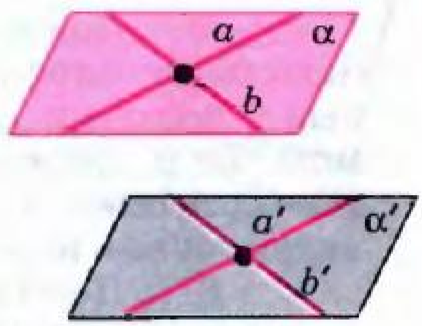

Рис. 76

5. ПОДОБИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФИГУР

Преобразование подобия в пространстве определяется так же, как и на плоскости. А именно: преобразование фигуры F называется **преобразованием подобия**, если при этом преобразовании расстояния между точками изменяются в одно и то же число раз, т. е. для любых двух точек X и Y фигуры F и точек X', Y' фигуры F', в которые они переходят, $X'Y' = k \cdot XY$.

Так же как и на плоскости, преобразование подобия в пространстве переводит прямые в прямые, полупрямые в полупрямые, отрезки в отрезки и сохраняет углы между полупрямыми. Такими же рассуждениями, как в п. 28, доказывается, что преобразование подобия переводит плоскости в плоскости. Так же как и на плоскости, две фигуры называются **подобными**, если они переводятся одна в другую преобразованием подобия.

Простейшим преобразованием подобия в пространстве является гомотетия. Так же как и на плоскости, **гомотетия** относительно центра O с коэффициентом гомотетии k — это преобразование, которое переводит произвольную точку X в точку X' луча OX, такую, что $OX' = k \cdot OX$.

Преобразование гомотетии в пространстве переводит любую плоскость, не проходящую через центр гомотетии, в параллельную плоскость (или в себя при $k = 1$).

Действительно, пусть O — центр гомотетии и α — любая плоскость, не проходящая через точку O (рис. 77). Возьмем любую прямую AB в плоскости α. Преобразование гомотетии переводит точку A в точку A' на луче OA, а точку B в точку B' на луче OB, причем $\frac{OA'}{OA} = k$, $\frac{OB'}{OB} = k$, где k —коэффициент гомотетии. Отсюда следует подобие треугольников AOB и $A'OB'$. Из подобия треугольников следует равенство соответственных углов OAB и $OA'B'$, а значит, параллельность прямых AB и $A'B'$.

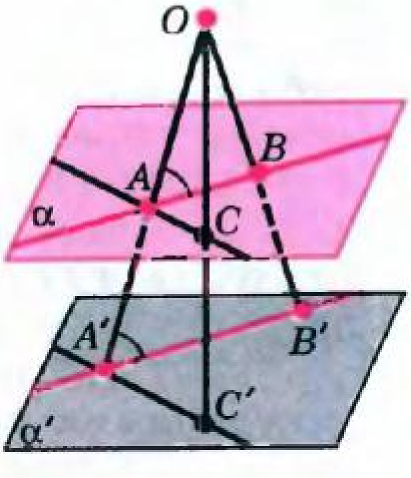

Рис. 77

Возьмем теперь другую прямую AC в плоскости α. Она при гомотетии перейдет в параллельную прямую $A'C'$. При рассматриваемой гомотетии плоскость α перейдет в плоскость α', проходящую через прямые $A'B'$, $A'C'$. Так как $A'B' \parallel AB$ и $A'C' \parallel AC$, то по теореме 2.4 плоскости α и α' параллельны, что и требовалось доказать.

Изучите примеры решения задач

ЗАДАЧА 1

Даны точки (1; 2; 3), (0; −1; 2), (1; 0; −3). Найдите точки, симметричные данным относительно координатных плоскостей.

Решение.

Точка, симметричная точке (1; 2; 3) относительно плоскости xy, лежит на прямой, перпендикулярной плоскости xy. Поэтому у нее те же координаты x и y: $x = 1$, $y = 2$. Симметричная точка находится на том же расстоянии от плоскости xy, но по другую сторону от нее. Поэтому координата z у нее отличается только знаком, т. е. $z = -3$. Итак, точкой, симметричной точке (1; 2; 3) относительно плоскости xy, будет точка (1; 2; −3). Для других точек и других координатных плоскостей решение аналогично.

ЗАДАЧА 2

Найдите значения a, b, c в формулах параллельного переноса $x' = x + a$, $y' = y + b$, $z' = z + c$, если при этом параллельном переносе точка A (1; 0; 2) переходит в точку A' (2; 1; 0).

Решение.

Подставляя в формулы параллельного переноса координаты точек A и A', т. е. $x = 1$, $y = 0$, $z = 2$, $x' = 2$, $y' = 1$, $z' = 0$, получим уравнения, из которых определяются a, b, c:

$$2 = 1 + a,\ 1 = 0 + b,\ 0 = 2 + c.$$

Отсюда $a = 1$, $b = 1$, $c = -2$.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Атанасян Л.С. Геометрия. 10-11 класс. / Учебник. - Москва, Просвещение, 2019. - 287 стр.
2. Погорелов А.В. Геометрия. 10-11 класс. / Учебник. - Москва, Просвещение, 2014. - 175 стр.