Лекционный материал для самостоятельной работы по дисциплине «Математика»

Преподаватель Гречушникова Ю.С.
Группы СВ-11к, СМ-1

Лекция №6

Изучите лекционный материал и выполните практические задания

ТЕМА: ПРИМЕНЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ И ПРОИЗВОДНОЙ

Прочитайте пункты 18-19 (стр. 124-134) параграфа 5 (Применения непрерывности и производной) в учебнике и выполните практические задания.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Алгебра и начала математического анализа: учебник для 10-11 классов общеобразовательных учреждений /Под ред. А.Н. Колмогорова. - М., Просвещение, 2008. - 384 с.

ТЕМА: ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

ЦИЛИНДР

Цилиндром (точнее, круговым цилиндром) называется тело, которое состоит из двух кругов, не лежащих в одной плоскости и совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих кругов (рис. 123). Круги называются **основаниями цилиндра**, а отрезки, соединяющие соответствующие точки окружностей этих кругов, — **образующими цилиндра**.

Рис. 123

основания цилиндра равны.

у цилиндра основания лежат в параллельных плоскостях.

у цилиндра образующие параллельны и равны.

Поверхность цилиндра состоит из оснований и боковой поверхности. Боковая поверхность составлена из образующих.

Цилиндр называется **прямым**, если его образующие перпендикулярны плоскостям оснований.

Радиусом цилиндра называется радиус его основания. **Высотой цилиндра** называется расстояние между плоскостями его оснований.

Осью цилиндра называется прямая, проходящая через центры оснований. Она параллельна образующим.

ВПИСАННАЯ И ОПИСАННАЯ ПРИЗМЫ

Призмой, вписанной в цилиндр, называется такая призма, у которой плоскостями оснований являются плоскости оснований цилиндра, а боковыми ребрами — образующие цилиндра (рис. 128).

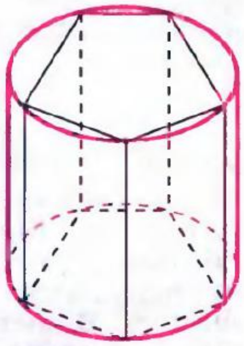

Рис. 128

Касательной плоскостью к цилиндру называется плоскость, проходящая через образующую цилиндра и перпендикулярная плоскости осевого сечения, содержащей эту образующую (рис. 130).

Призмой, описанной около цилиндра, называется призма, у которой плоскостями оснований являются плоскости оснований цилиндра, а боковые грани касаются цилиндра (рис. 131).

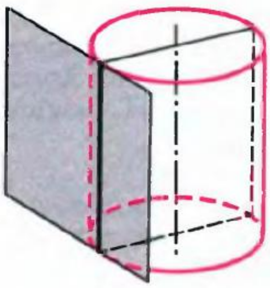

Рис. 130

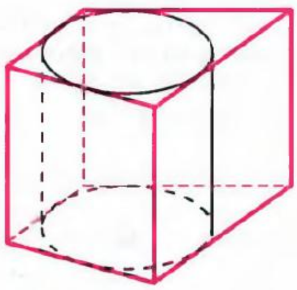

Рис. 131

КОНУС

Конусом (точнее, круговым конусом) называется тело, которое состоит из круга — **основания конуса**, точки, не лежащей в плоскости этого круга, — **вершины конуса** и всех отрезков, соединяющих вершину конуса с точками основания (рис. 132). Отрезки, соединяющие вершину конуса с точками окружности основания, называются **образующими конуса**. Поверхность конуса состоит из основания и боковой поверхности.

Конус называется **прямым**, если прямая, соединяющая вершину конуса с центром основания, перпендикулярна плоскости основания.

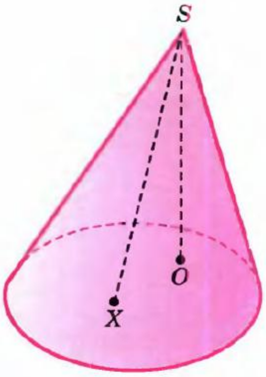

Рис. 132

Высотой конуса называется перпендикуляр, опущенный из его вершины на плоскость основания. У прямого конуса основание высоты совпадает с центром основания. **Осью прямого кругового конуса** называется прямая, содержащая его высоту.

ВПИСАННАЯ И ОПИСАННАЯ ПИРАМИДЫ

Пирамидой, вписанной в конус, называется такая пирамида, основание которой есть многоугольник, вписанный в окружность основания конуса, а вершиной является вершина конуса (рис. 138). Боковые ребра пирамиды, вписанной в конус, являются образующими конуса.

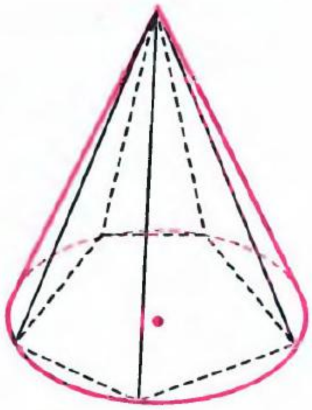

Рис. 138

Касательной плоскостью к конусу называется плоскость, проходящая через образующую конуса и перпендикулярная плоскости осевого сечения, содержащей эту образующую (рис. 140).

Пирамидой, описанной около конуса, называется пирамида, у которой основанием служит многоугольник, описанный около основания конуса, а вершина совпадает с вершиной конуса (рис. 141). Плоскости боковых граней описанной пирамиды являются касательными плоскостями конуса.

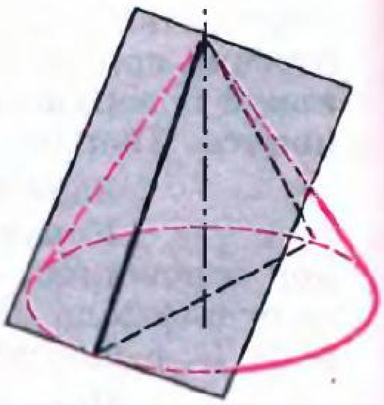

Рис. 140

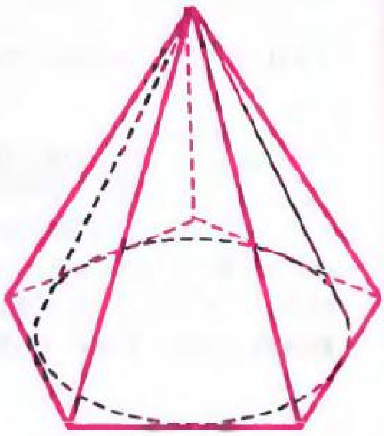

Рис. 141

ШАР

Шаром называется тело, которое состоит из всех точек пространства, находящихся на расстоянии, не большем данного, от данной точки. Эта точка называется **центром шара**, а данное расстояние — **радиусом шара**.

Граница шара называется **шаровой поверхностью** или **сферой**. Таким образом, точками сферы являются все точки шара, которые удалены от центра на расстояние, равное радиусу. Любой отрезок, соединяющий центр шара с точкой шаровой поверхности, также называется радиусом.

Отрезок, соединяющий две точки шаровой поверхности и проходящий через центр шара, называется **диаметром**. Концы любого диаметра называются **диаметрально противоположными точками шара**.

Шар, так же как цилиндр и конус, является телом вращения. Он получается при вращении полукруга вокруг его диаметра как оси (рис. 142).

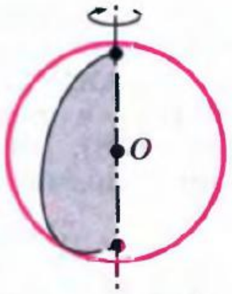

Рис. 142

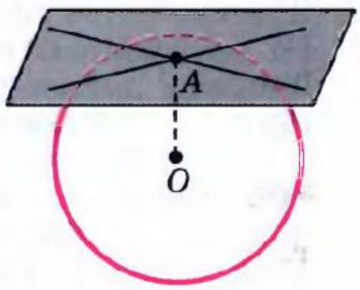

Рис. 147

КАСАТЕЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ К ШАРУ

Плоскость, проходящая через точку A шаровой поверхности и перпендикулярная радиусу, проведенному в точку A, называется **касательной плоскостью**. Точка A называется **точкой касания** (рис. 147).

Прямая в касательной плоскости шара, проходящая через точку касания, называется **касательной к шару** в этой точке. Так как касательная плоскость имеет с шаром только одну общую точку, то касательная прямая тоже имеет с шаром только одну общую точку — точку касания.

ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ МНОГОГРАННИКИ

Многогранник называется **вписанным в шар**, если все его вершины лежат на поверхности шара. Многогранник называется **описанным около шара**, если все его грани касаются поверхности шара.

О ПОНЯТИИ ТЕЛА И ЕГО ПОВЕРХНОСТИ В ГЕОМЕТРИИ

Точка фигуры называется **внутренней**, если существует шар с центром в этой точке, целиком принадлежащий фигуре. Фигура называется **областью**, если все ее точки внутренние и если любые две ее точки можно соединить ломаной, целиком принадлежащей фигуре. Поясним данное определение на примере шара (рис. 153).

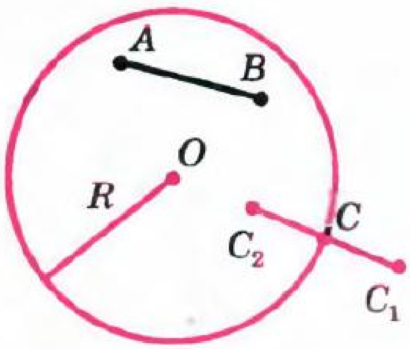

Рис. 153

Каждая точка шара, которая удалена от его центра на расстояние r, меньшее R, является внутренней точкой шара, так как шар с центром в этой точке и радиусом $R - r$ содержится в исходном шаре радиуса R. Все точки шара, которые удалены от центра на расстояние, меньшее R, образуют область. В самом деле, любые две такие точки A и B соединяются отрезком AB, все точки которого удалены от центра на расстояние, меньшее R.

Точка пространства называется **граничной точкой** данной фигуры, если любой шар с центром в этой точке содержит как точки, принадлежащие фигуре, так и точки, не принадлежащие ей. Для шара граничными точками являются точки, которые удалены от точки O на расстояние, равное R, т. е. граница шара есть сфера. Для каждой такой точки C можно указать в каждом шаре с центром C и радиусом $r > 0$ точки C_1 и C_2, отстоящие от точки O на расстояние, большее R, и на расстояние, меньшее R. Область вместе с ее границей называется **замкнутой областью.**

Телом называется конечная замкнутая область. Граница тела называется **поверхностью тела.** Шар является примером тела. Другими знакомыми нам примерами тел являются многогранник, цилиндр и конус.

Подобно тому как в пространстве, на плоскости вводятся понятия внутренней точки фигуры, граничной точки и области. Граничные точки области образуют границу области. В круге радиуса R точки, которые находятся на расстоянии, меньшем R, от центра, внутренние, а точки, находящиеся на расстоянии R, граничные. Круг — замкнутая область. Плоский многоугольник — это ограниченная замкнутая область на плоскости, граница которой является многоугольником.

ТЕОРЕМЫ

6.1

Плоскость, параллельная плоскости основания цилиндра, пересекает его боковую поверхность по окружности, равной окружности основания.

Доказательство.

Пусть β — плоскость, параллельная плоскости основания цилиндра (рис. 127). Параллельный перенос в направлении оси цилиндра, совмещающий плоскость β с плоскостью основания цилиндра, совмещает сечение боковой поверхности плоскостью β с окружностью основания. Теорема доказана.

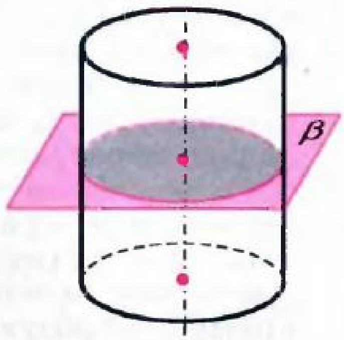

Рис. 127

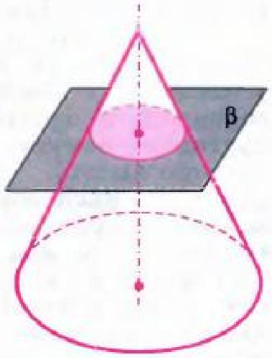

Рис. 136

6.2

Плоскость, параллельная плоскости основания конуса, пересекает конус по кругу, а боковую поверхность — по окружности с центром на оси конуса.

Доказательство.

Пусть β — плоскость, параллельная плоскости основания конуса и пересекающая конус (рис. 136). Преобразование гомотетии относительно вершины конуса, совмещающее плоскость β с плоскостью основания, совмещает сечение конуса плоскостью β с основанием конуса. Следовательно, сечение конуса плоскостью есть круг, а сечение боковой поверхности — окружность с центром на оси конуса. Теорема доказана.

Всякое сечение шара плоскостью есть круг. Центр этого круга есть основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость.

Доказательство.

Пусть α — секущая плоскость и O — центр шара (рис. 143). Опустим перпендикуляр из центра шара на плоскость α и обозначим через O' основание этого перпендикуляра.

Пусть X — произвольная точка шара, принадлежащая плоскости α. По теореме Пифагора $OX^2 = OO'^2 + O'X^2$. Так как OX не больше радиуса R шара, то $O'X \leqslant \sqrt{R^2 - OO'^2}$, т. е. любая точка сечения шара плоскостью α находится от точки O' на расстоянии, не большем $\sqrt{R^2 - OO'^2}$, следовательно, она принадлежит кругу с центром O' и радиусом $\sqrt{R^2 - OO'^2}$.

Обратно: любая точка X этого круга принадлежит шару. А это значит, что сечение шара плоскостью α есть круг с центром в точке O'. Теорема доказана.

Плоскость, проходящая через центр шара, называется **диаметральной плоскостью.** Сечение шара диаметральной плоскостью называется **большим кругом** (рис. 144), а сечение сферы — **большой окружностью.**

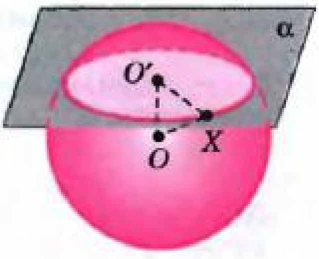

Рис. 143

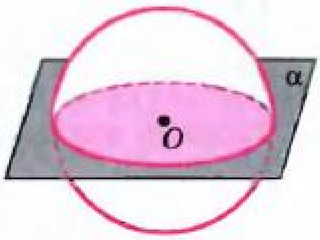

Рис. 144

6.4

Любая диаметральная плоскость шара является его плоскостью симметрии. Центр шара является его центром симметрии.

Доказательство.

Пусть α — диаметральная плоскость и X — произвольная точка шара (рис. 146). Построим точку X', симметричную точке X относительно плоскости α.

Плоскость α перпендикулярна отрезку XX' и пересекается с ним в его середине (в точке A). Из равенства прямоугольных треугольников OAX и OAX' следует, что $OX' = OX$.

Так как $OX \leqslant R$, то и $OX' \leqslant R$, т. е. точка, симметричная точке X, принадлежит шару. Первое утверждение теоремы доказано.

Пусть теперь X'' — точка, симметричная точке X относительно центра шара. Тогда $OX'' = OX \leqslant R$, т. е. точка X'' принадлежит шару. Теорема доказана полностью.

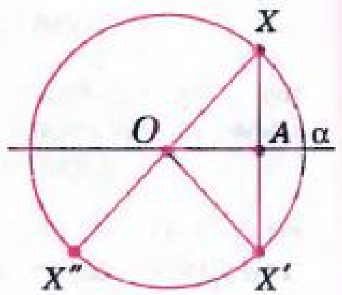

Рис. 146

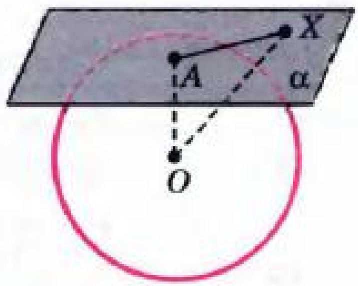

Рис. 148

6.5

Касательная плоскость имеет с шаром только одну общую точку — точку касания.

Доказательство.

Пусть α — плоскость, касательная к шару, и A — точка касания (рис. 148). Возьмем произвольную точку X плоскости α, отличную от A. Так как OA — перпендикуляр, а OX — наклонная, то

$$OX > OA = R.$$

Следовательно, точка X не принадлежит шару. Теорема доказана.

Линия пересечения двух сфер есть окружность.

Доказательство.

Пусть O_1 и O_2 — центры сфер и A — точка их пересечения (рис. 150). Проведем через точку A плоскость α, перпендикулярную прямой O_1O_2.

Обозначим через B точку пересечения плоскости α с прямой O_1O_2. По теореме 6.3 плоскость α пересекает обе сферы по окружности K с центром B, проходящей через точку A. Таким образом, окружность K принадлежит пересечению сфер.

Покажем теперь, что сферы не имеют других точек пересечения, кроме точек окружности K. Допустим, точка X пересечения сфер не лежит на окружности K. Проведем плоскость через точку X и прямую O_1O_2. Она пересечет сферы по окружностям с центрами O_1 и O_2. Эти окружности пересекаются в двух точках, принадлежащих окружности K, да еще в точке X. Но две окружности не могут иметь больше двух точек пересечения. Мы пришли к противоречию. Итак, пересечение наших сфер есть окружность (K). Теорема доказана.

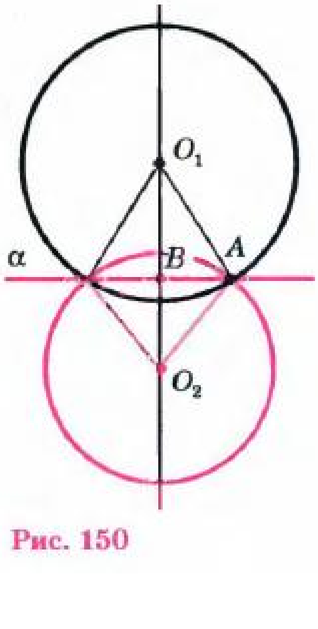

Рис. 150

ЗАДАЧИ

ЗАДАЧА 1

В цилиндр вписана правильная шестиугольная призма. Найдите угол между диагональю ее боковой грани и осью цилиндра, если радиус основания равен высоте цилиндра.

Решение.

Боковые грани призмы — квадраты, так как сторона правильного шестиугольника, вписанного в окружность, равна радиусу (рис. 129). Ребра призмы параллельны оси цилиндра, поэтому угол между диагональю грани и осью цилиндра равен углу между диагональю и боковым ребром. А этот угол равен 45°, так как грани — квадраты.

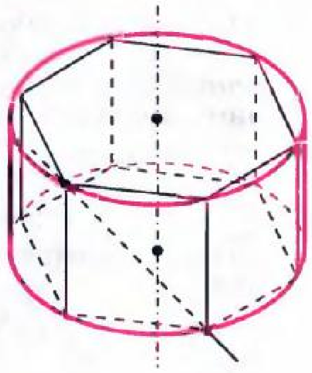

Рис. 129

ЗАДАЧА 2

Конус пересечен плоскостью, параллельной основанию, на расстоянии d от вершины. Найдите площадь сечения, если радиус основания конуса R, а высота H.

Решение.

Сечение конуса получается из основания конуса преобразованием гомотетии относительно вершины конуса с коэффициентом гомотетии $k = \frac{d}{H}$. Поэтому радиус круга в сечении $r = R\frac{d}{H}$.

Следовательно, площадь сечения $S = \pi R^2 \frac{d^2}{H^2}$.

ЗАДАЧА 3

У пирамиды все боковые ребра равны. Докажите, что она вписана в некоторый конус.

Решение.

Опустим перпендикуляр SO из вершины пирамиды на плоскость основания (рис. 139) и обозначим длину боковых ребер пирамиды через l. Вершины основания удалены от точки O на одно и то же расстояние $R=\sqrt{l^2-OS^2}$. Отсюда следует, что наша пирамида вписана в конус, у которого вершиной является вершина пирамиды, а основанием — круг с центром O и радиусом R.

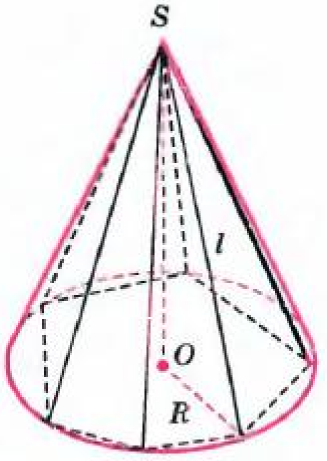

Рис. 139

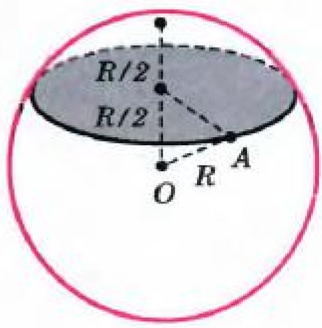

Рис. 145

ЗАДАЧА 4

Через середину радиуса шара проведена перпендикулярная ему плоскость. Как относится площадь полученного сечения к площади большого круга?

Решение.

Если радиус шара R (рис. 145), то радиус круга в сечении будет $\sqrt{R^2-\left(\frac{R}{2}\right)^2}=R\sqrt{\frac{3}{4}}$. Отношение площади этого круга к площади большого круга равно $\pi\left(R\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2:\pi R^2=\frac{3}{4}$.

ЗАДАЧА 5

Шар радиуса R касается сторон правильного треугольника со стороной a. Найдите расстояние от центра шара до плоскости треугольника.

Решение.

Пусть A, B, C — точки касания шара со сторонами треугольника (рис. 149). Опустим из центра O шара перпендикуляр OO_1 на плоскость треугольника. Отрезки OA, OB и OC перпендикулярны сторонам. По теореме о трех перпендикулярах отрезки O_1A, O_1B и O_1C тоже перпендикулярны соответствующим сторонам треугольника.

Из равенства прямоугольных треугольников OO_1A, OO_1B, OO_1C (у них катет общий, а гипотенузы равны радиусу) следует равенство сторон: $O_1A = O_1B = O_1C$. Следовательно, O_1 — центр окружности, вписанной в треугольник. Радиус этой окружности, как мы знаем, равен $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. По теореме Пифагора находим искомое расстояние. Оно равно $\sqrt{OA^2 - O_1A^2} = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{12}}$.

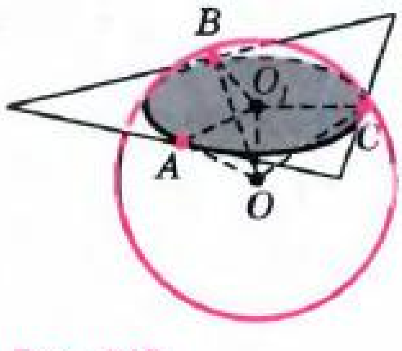

Рис. 149

ЗАДАЧА 6

Два равных шара радиуса R расположены так, что центр одного лежит на поверхности другого. Найдите длину линии, по которой пересекаются их поверхности.

Решение.

Проведем сечение через центры шаров (рис. 151). Линия, о которой идет речь в задаче, есть окружность (теорема 6.6). Ее радиус равен высоте равностороннего треугольника OAO_1 со сторонами, равными R. Высота равна $\frac{R\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, длина линии равна $\pi R\sqrt{3}$.

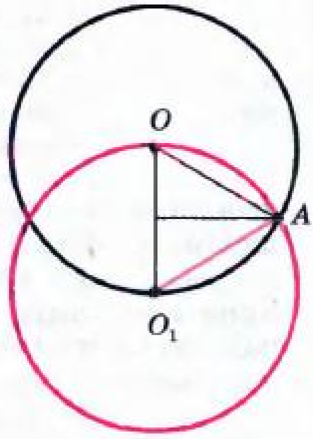

Рис. 151

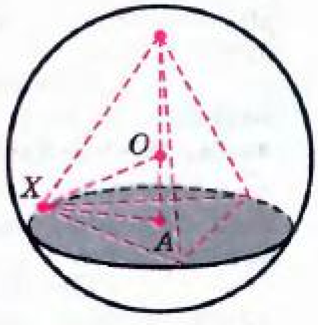

Рис. 152

ЗАДАЧА 7

Докажите, что центр шара, описанного около правильной пирамиды, лежит на ее оси.

Решение.

Опустим перпендикуляр OA из центра шара O на плоскость основания пирамиды (рис. 152). Пусть X — произвольная вершина основания пирамиды. По теореме Пифагора

$$AX^2 = OX^2 - OA^2 = R^2 - OA^2.$$

Таким образом, AX одно и то же для любой вершины основания пирамиды. А это значит, что точка A является центром окружности, описанной около основания пирамиды. Следовательно, центр шара O лежит на оси пирамиды.

ПОСТРОЕНИЕ СЕЧЕНИЙ

СЕЧЕНИЯ ЦИЛИНДРА ПЛОСКОСТЯМИ

Сечение цилиндра плоскостью, параллельной его оси, представляет собой прямоугольник (рис. 126, *а*). Две его стороны — образующие цилиндра, а две другие — параллельные хорды оснований. В частности, прямоугольником является **осевое сечение**. Это — сечение цилиндра плоскостью, проходящей через его ось (рис. 126, *б*).

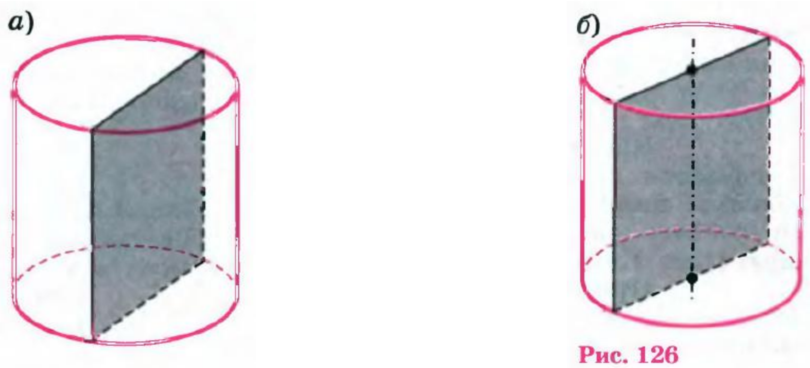

Рис. 126

СЕЧЕНИЯ КОНУСА ПЛОСКОСТЯМИ

Сечение конуса плоскостью, проходящей через его вершину, представляет собой равнобедренный треугольник, у которого боковые стороны являются образующими конуса (рис. 134). В частности, равнобедренным треугольником является осевое сечение конуса. Это — сечение, которое проходит через ось конуса (рис. 135).

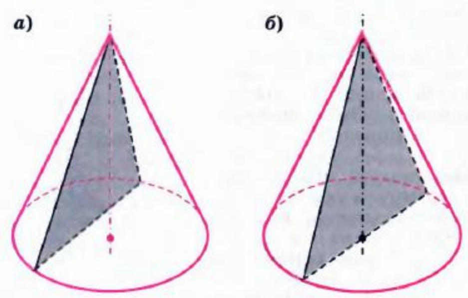

Рис. 135

Рис. 137

Плоскость, параллельная основанию конуса и пересекающая конус, отсекает от него меньший конус. Оставшаяся часть называется **усеченным конусом** (рис. 137).

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Атанасян Л.С. Геометрия. 10-11 класс. / Учебник. - Москва, Просвещение, 2019. - 287 стр.
2. Погорелов А.В. Геометрия. 10-11 класс. / Учебник. - Москва, Просвещение, 2014. - 175 стр.