Лекционный материал для самостоятельной работы по дисциплине «Математика»

Преподаватель Гречушникова Ю.С.
Группы СВ-11к, СМ-1к

Лекция №7

Изучите лекционный материал и выполните практические задания

ТЕМА: ПРИМЕНЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИИ

Прочитайте пункты 20-21 (стр. 134-143) параграфа 5 (Применения непрерывности и производной), пункты 22-25 (стр. 143-160) параграфа 6 (Применения производной к исследованию функции) в учебнике и выполните практические задания.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Алгебра и начала математического анализа: учебник для 10-11 классов общеобразовательных учреждений /Под ред. А.Н. Колмогорова. - М., Просвещение, 2008. - 384 с.

ТЕМА: ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ

Так же как и на плоскости, две прямые называются **перпендикулярными**, если они пересекаются под прямым углом.

ПРИЗНАК ПЕРЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Прямая, пересекающая плоскость, называется **перпендикулярной** этой плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, которая лежит в данной плоскости и проходит через точку пересечения данной прямой и плоскости (рис. 42).

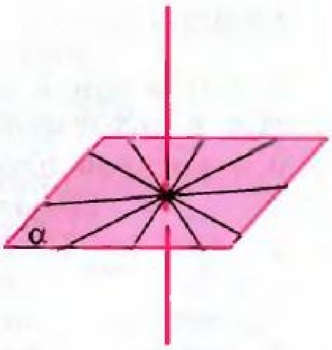

Рис. 42

ПЕРПЕНДИКУЛЯР И НАКЛОННАЯ

Пусть даны плоскость и не лежащая на ней точка. **Перпендикуляром**, опущенным из данной точки на данную плоскость, называется отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости и лежащий на прямой, перпендикулярной плоскости. Конец этого отрезка, лежащий в плоскости, называется **основанием перпендикуляра**. **Расстоянием** от точки до плоскости называется длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость.

Наклонной, проведенной из данной точки к данной плоскости, называется любой отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости, не являющийся перпендикуляром к плоскости. Конец отрезка, лежащий в плоскости, называется **основанием наклонной**. Отрезок, соединяющий основания перпендикуляра и наклонной, проведенных из одной и той же точки, называется **проекцией наклонной**.

На рисунке 51 из точки A проведены к плоскости α перпендикуляр AB и наклонная AC. Точка B — основание перпендикуляра, точка C — основание наклонной, BC — проекция наклонной AC на плоскость α.

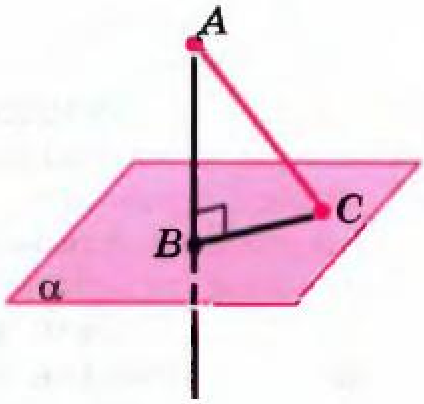

Рис. 51

Расстоянием от прямой до параллельной ей плоскости называется расстояние от любой точки этой прямой до плоскости.

расстоянием между параллельными плоскостями называется расстояние от любой точки одной плоскости до другой плоскости.

ПРИЗНАК ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПЛОСКОСТЕЙ

Две пересекающиеся плоскости называются **перпендикулярными**, если третья плоскость, перпендикулярная прямой пересечения этих плоскостей, пересекает их по перпендикулярным прямым.

На рисунке 55, *а* вы видите две перпендикулярные плоскости α и β, пересекающиеся по прямой c. Плоскость γ, перпендикулярная прямой c, пересекает плоскости α и β по перпендикулярным прямым a и b.

Любая плоскость, перпендикулярная линии пересечения перпендикулярных плоскостей, пересекает их по перпендикулярным прямым.

Действительно, если взять другую плоскость γ', перпендикулярную прямой c (рис. 55, *б*), то она пересечет плоскость α по прямой a', перпендикулярной c, а значит, параллельной прямой a, а плоскость β по прямой b', перпендикулярной c и, значит, параллельной прямой b. По теореме 3.1 из перпендикулярности прямых a и b следует перпендикулярность прямых a' и b', что и требовалось доказать.

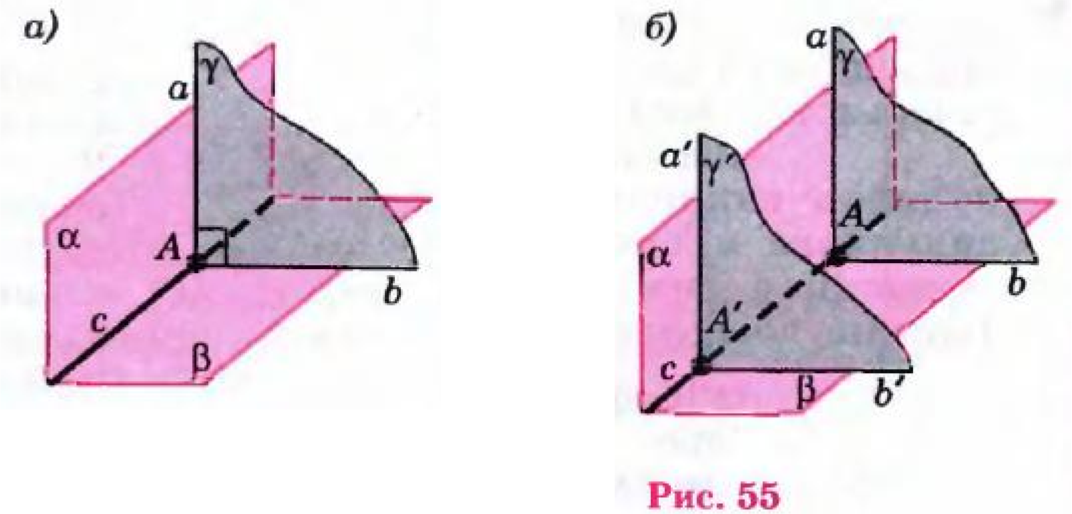

Рис. 55

РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ СКРЕЩИВАЮЩИМИМСЯ ПРЯМЫМИ

Общим перпендикуляром двух скрещивающихся прямых называется отрезок с концами на этих прямых, являющийся перпендикуляром к каждой из них.

Докажем, что

две скрещивающиеся прямые имеют общий перпендикуляр, и притом только один. Он является общим перпендикуляром параллельных плоскостей, проходящих через эти прямые.

Действительно, пусть a и b — данные скрещивающиеся прямые (рис. 58). Проведем через них параллельные плоскости α и β. Прямые, пересекающие прямую a и перпендикулярные плоскости α, лежат в одной плоскости (γ). Эта плоскость пересекает плоскость β по прямой a', параллельной a. Пусть B — точка пересечения прямых a' и b. Тогда прямая AB, перпендикулярная плоскости α, перпендикулярна и плоскости β, так как β параллельна α. Отрезок AB — общий перпендикуляр плоскостей α и β, а значит, и прямых a и b.

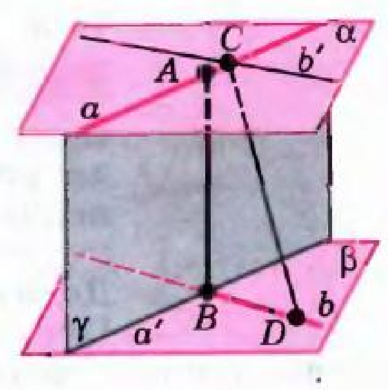

Рис. 58

Докажем, что этот общий перпендикуляр единственный. Допустим, что у прямых a и b есть другой общий перпендикуляр CD. Проведем через точку C прямую b', параллельную b. Прямая CD перпендикулярна прямой b, а значит, и прямой b'. Так как она перпендикулярна прямой a, то она перпендикулярна плоскости α, а значит, параллельна прямой AB. Выходит, что через прямые AB и CD, как через параллельные, можно провести плоскость. В этой плоскости будут лежать наши скрещивающиеся прямые AC и BD, а это невозможно, что и требовалось доказать.

Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется длина их общего перпендикуляра. Оно равно расстоянию между параллельными плоскостями, проходящими через эти прямые.

ПРИМЕНЕНИЕ ОРТОГОНАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ В ТЕХНИЧЕСКОМ ЧЕРЧЕНИИ

В черчении применяется ортогональное проектирование, т. е. параллельное проектирование прямыми, перпендикулярными плоскости проекции. Чертежи деталей машин получаются путем ортогонального проектирования на одну, две или три взаимно перпендикулярные плоскости. Эти плоскости называются плоскостями проекций. Плоскости проекций с проекциями изображаемой детали на них совмещаются поворотом около прямых, по которым они пересекаются.

На рисунке 59 показано выполнение чертежа болта путем проектирования на две плоскости: горизонтальную H и вертикальную V. Чертеж болта в двух проекциях показан на рисунке 60.

При выполнении чертежей деталей машин пользуются различными условностями, предусмотренными стандартом. В частности, резьба условно изображается сплошной тонкой линией, а центровые и осевые — штрихпунктирными линиями. Эти условности изображения применены на чертеже болта (см. рис. 60).

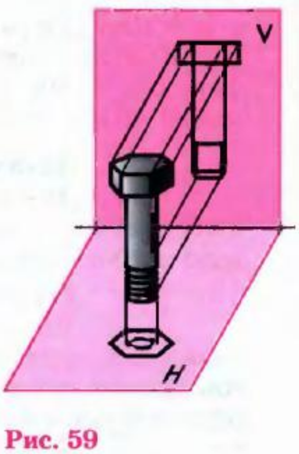

Рис. 59

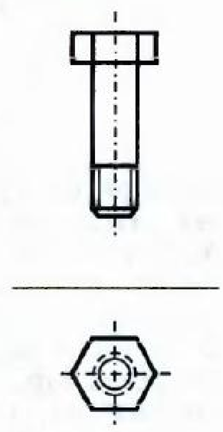

Рис. 60

3.1

Если две пересекающиеся прямые параллельны соответственно двум перпендикулярным прямым, то они тоже перпендикулярны.

Доказательство.

Пусть a и b — перпендикулярные прямые, а a_1 и b_1 — параллельные им пересекающиеся прямые. Докажем, что прямые a_1 и b_1 перпендикулярны.

Если прямые a, b, a_1, b_1 лежат в одной плоскости, то они обладают указанным в теореме свойством, как это известно из планиметрии.

Допустим теперь, что наши прямые не лежат в одной плоскости. Тогда прямые a и b лежат в некоторой плоскости α, а прямые a_1 и b_1 — в некоторой плоскости α_1 (рис. 40).

По теореме 2.4 плоскости α и α_1 параллельны. Пусть C — точка пересечения прямых a и b, а C_1 — точка пересечения прямых a_1 и b_1. Проведем в плоскости параллельных прямых a и a_1 прямую, параллельную прямой CC_1. Она пересечет прямые a и a_1 в точках A и A_1. В плоскости прямых b и b_1 проведем прямую, параллельную прямой CC_1, и обозначим через B и B_1 точки ее пересечения с прямыми b и b_1.

Четырехугольники CAA_1C_1 и CBB_1C_1 — параллелограммы, так как у них противолежащие стороны параллельны.

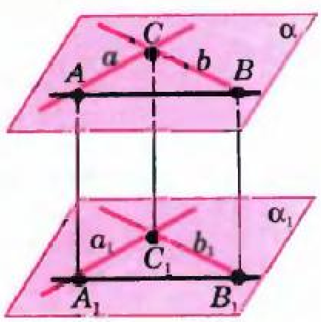

Рис. 40

Четырехугольник ABB_1A_1 также параллелограмм. У него стороны AA_1, BB_1 параллельны, потому что каждая из них параллельна прямой CC_1.

Таким образом, четырехугольник лежит в плоскости, проходящей через параллельные прямые AA_1 и BB_1. А она пересекает параллельные плоскости α и α_1 по параллельным прямым AB и A_1B_1.

Так как у параллелограмма противолежащие стороны равны, то

$$AB = A_1B_1,\ AC = A_1C_1,\ BC = B_1C_1.$$

По третьему признаку равенства треугольников треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны. Итак, угол $A_1C_1B_1$, равный углу ACB, прямой, т. е. прямые a_1 и b_1 перпендикулярны, что и требовалось доказать.

3.2

Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна данной плоскости.

Доказательство.

Пусть a — прямая, перпендикулярная прямым b и c в плоскости α. Тогда прямая a проходит через точку A пересечения прямых b и c (рис. 43). Докажем, что прямая a перпендикулярна плоскости α.

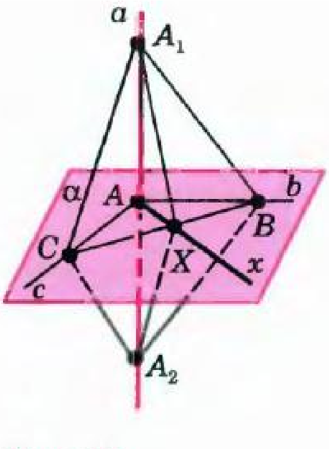

Рис. 43

Проведем произвольную прямую x через точку A в плоскости α и покажем, что она перпендикулярна прямой a. Проведем в плоскости α произвольную прямую, не проходящую через точку A и пересекающую прямые b, c и x. Пусть точками пересечения будут B, C и X.

Отложим на прямой a от точки A в разные стороны равные отрезки AA_1 и AA_2. Треугольник A_1CA_2 равнобедренный, так как отрезок AC является высотой по условию теоремы и медианой по построению ($AA_1 = AA_2$). По той же причине треугольник A_1BA_2 тоже равнобедренный. Следовательно, треугольники A_1BC и A_2BC равны по третьему признаку равенства треугольников.

Из равенства треугольников A_1BC и A_2BC следует равенство углов A_1BX, A_2BX и, следовательно, равенство треугольников A_1BX и A_2BX по первому признаку равенства треугольников. Из равенства сторон A_1X и A_2X этих треугольников заключаем, что треугольник A_1XA_2 равнобедренный. Поэтому его медиана XA является также высотой. А это и значит, что прямая x перпендикулярна a. По определению прямая a перпендикулярна плоскости α. Теорема доказана.

3.3

Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.

Доказательство.

Пусть a_1 и a_2 — две параллельные прямые и α — плоскость, перпендикулярная прямой a_1 (рис. 48). Докажем, что эта плоскость перпендикулярна и прямой a_2.

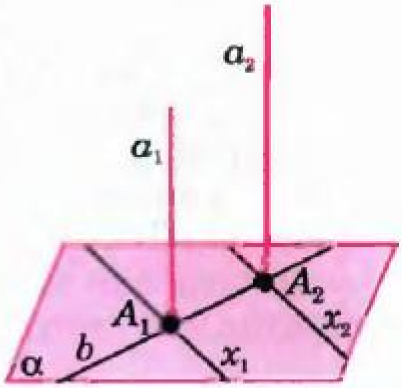

Рис. 48

Проведем через точку A_2 пересечения прямой a_2 с плоскостью α произвольную прямую x_2 в плоскости α. Проведем в плоскости α через точку A_1 пересечения прямой a_1 с плоскостью α прямую x_1, параллельную прямой x_2.

Так как прямая a_1 перпендикулярна плоскости α, то прямые a_1 и x_1 перпендикулярны. А по теореме 3.1 параллельные им пересекающиеся прямые a_2 и x_2 тоже перпендикулярны.

Таким образом, прямая a_2 перпендикулярна любой прямой x_2 в плоскости α. А это значит, что прямая a_2 перпендикулярна плоскости α. Теорема доказана.

3.4

Две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости, параллельны.

Доказательство.

Пусть a и b — две прямые, перпендикулярные плоскости α (рис. 50). Допустим, что прямые a и b не параллельны.

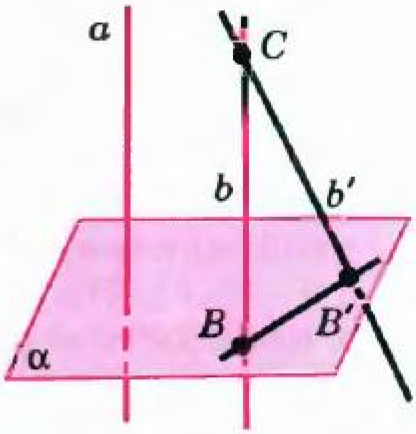

Рис. 50

Выберем на прямой b точку C, не лежащую в плоскости α. Проведем через точку C прямую b', параллельную прямой a. Прямая b' перпендикулярна плоскости α (теорема 3.3). Пусть B и B' — точки пересечения прямых b и b' с плоскостью α. Тогда прямая BB' перпендикулярна пересекающимся прямым b и b'. А это невозможно. Мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА О ТРЕХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРАХ

3.5

Если прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной, перпендикулярна ее проекции, то она перпендикулярна наклонной. И обратно: если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции наклонной.

Доказательство.

Пусть AB — перпендикуляр к плоскости α, AC — наклонная и c — прямая в плоскости α, проходящая через основание C наклонной (рис. 53). Проведем прямую CA', параллельную прямой AB. Она перпендикулярна плоскости α. Проведем через прямые AB и $A'C$ плоскость β. Прямая c перпендикулярна прямой CA'. Если она перпендикулярна прямой CB, то она перпендикулярна плоскости β, а значит, и прямой AC.

Аналогично если прямая c перпендикулярна наклонной CA, то она, будучи перпендикулярна и прямой CA', перпендикулярна плоскости β, а значит, и проекции наклонной BC. Теорема доказана.

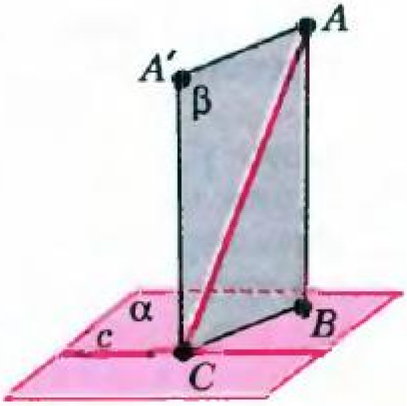

Рис. 53

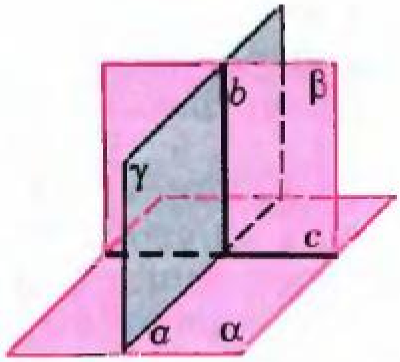

Рис. 56

3.6

Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.

Доказательство.

Пусть α — плоскость, b — перпендикулярная ей прямая, β — плоскость, проходящая через прямую b, и c — прямая, по которой пересекаются плоскости α и β (рис. 56). Докажем, что плоскости α и β перпендикулярны.

Проведем в плоскости α через точку пересечения прямой b с плоскостью α прямую a, перпендикулярную прямой c. Проведем через прямые a и b плоскость γ. Она перпендикулярна прямой c, так как прямая c перпендикулярна прямым a и b. Так как прямые a и b перпендикулярны, то плоскости α и β перпендикулярны. Теорема доказана.

ЗАДАЧИ

ЗАДАЧА 1

Докажите, что через любую точку прямой в пространстве можно провести перпендикулярную ей прямую.

Решение.

Пусть a — прямая и A — точка на ней (рис. 41). Возьмем любую точку X вне прямой a и проведем через эту точку и прямую a плоскость α (теорема 1.1). В плоскости α через точку A можно провести прямую b, перпендикулярную прямой a.

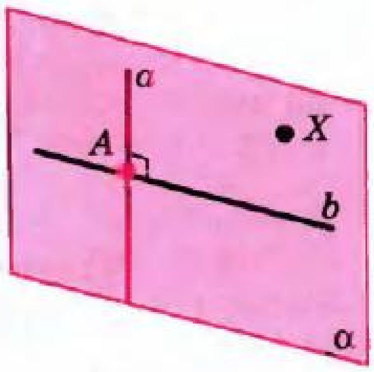

Рис. 41

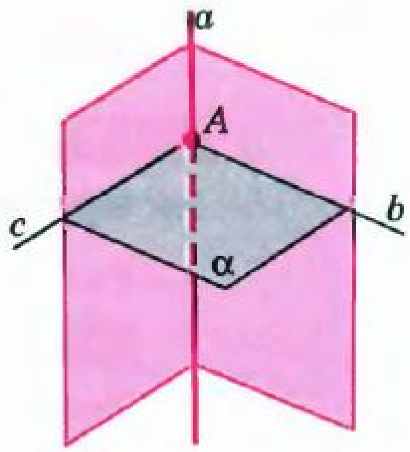

Рис. 44

ЗАДАЧА 2

Докажите, что через данную точку прямой можно провести одну и только одну перпендикулярную ей плоскость.

Решение.

Пусть a — данная прямая и A — точка на ней (рис. 44). Проведем через нее две плоскости и проведем в них через точку A прямые b и c, перпендикулярные прямой a. Плоскость α, проходящая через эти прямые, перпендикулярна прямой a по теореме 3.2.

Докажем, что эта плоскость единственна. Допустим, что, кроме плоскости α, существует другая плоскость α', проходящая через точку A и перпендикулярная прямой a (рис. 45). Пусть B — точка плоскости α', не лежащая в плоскости α. Проведем через точку B и прямую a плоскость. Она пересечет плоскости α и α' по различным прямым b и b', перпендикулярным прямой a. А это, как мы знаем, невозможно, так как на плоскости через данную точку прямой проходит только одна перпендикулярная ей прямая. Итак, плоскость, проходящая через точку A и перпендикулярная прямой a, единственна.

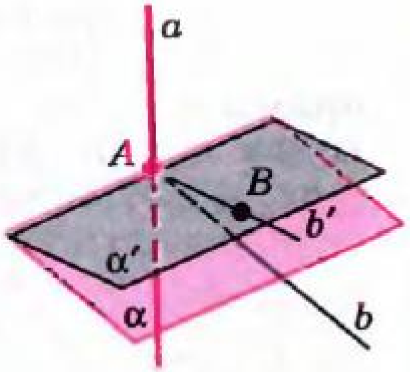

Рис. 45

ЗАДАЧА 3

Докажите, что через данную точку плоскости можно провести одну и только одну перпендикулярную ей прямую.

Решение.

Пусть α — данная плоскость и A — точка на ней (рис. 46). Проведем в плоскости α через точку A две прямые b и c. Проведем через точку A перпендикулярные им плоскости. Они пересекутся по некоторой прямой a, перпендикулярной прямым b и c. Следовательно, прямая a перпендикулярна плоскости α.

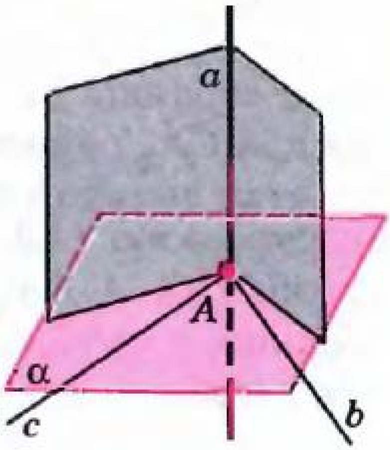

Рис. 46

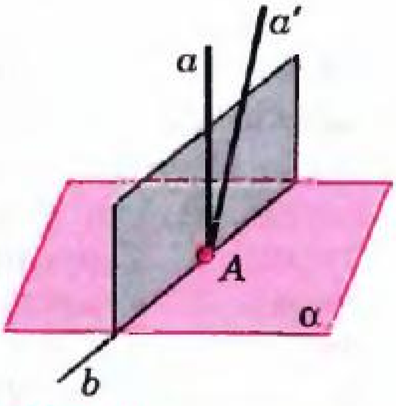

Рис. 47

Докажем, что эта прямая единственна. Допустим, что, кроме прямой a, существует другая прямая a', проходящая через точку A и перпендикулярная плоскости α (рис. 47). Проведем через прямые a и a' плоскость. Она пересечет плоскость α по некоторой прямой b, перпендикулярной прямым a и a'. А это, как мы знаем, невозможно. Итак, прямая, проходящая через данную точку плоскости и перпендикулярная этой плоскости, единственна.

ЗАДАЧА 4

Докажите, что через любую точку A можно провести прямую, перпендикулярную данной плоскости α.

Решение.

Проведем в плоскости α две пересекающиеся прямые b и c (рис. 49). Через точку их пересечения проведем плоскости β и γ, перпендикулярные прямым b и c соответственно.

Они пересекаются по некоторой прямой a. Прямая a перпендикулярна прямым b и c, значит, и плоскости α. Проведем теперь через точку A прямую d, параллельную a. По теореме 3.3 она перпендикулярна плоскости α.

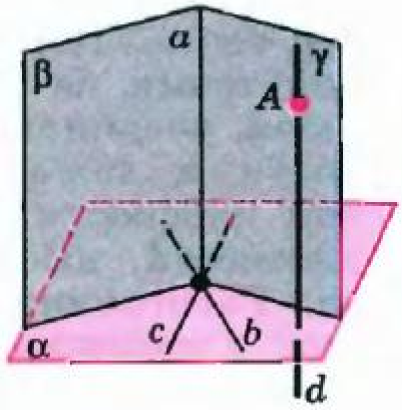

Рис. 49

ЗАДАЧА 5

Докажите, что если прямая параллельна плоскости, то все ее точки находятся на одинаковом расстоянии от плоскости.

Решение.

Пусть a — данная прямая и α — данная плоскость (рис. 52). Возьмем на прямой a две произвольные точки X и Y. Их расстояния до плоскости α — это длины перпендикуляров XX' и YY', опущенных на эту плоскость. По теореме 3.4 прямые XX' и YY' параллельны, следовательно, лежат в одной плоскости. Эта плоскость пересекает плоскость α по прямой $X'Y'$. Прямая a параллельна прямой $X'Y'$, так как не пересекает содержащую ее плоскость α. Итак, у четырехугольника $XX'Y'Y$ противолежащие стороны параллельны. Следовательно, он параллелограмм, а значит, $XX' = YY'$.

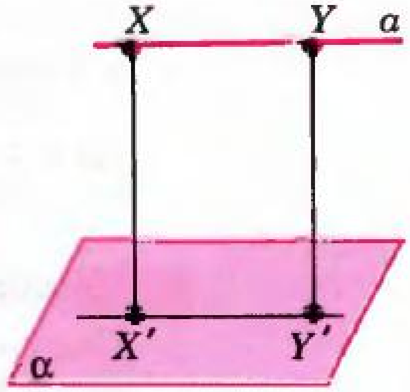

Рис. 52

ЗАДАЧА 6

Через центр вписанной в треугольник окружности проведена прямая, перпендикулярная плоскости треугольника. Докажите, что каждая точка этой прямой равноудалена от сторон данного треугольника.

Решение.

Пусть A, B, C — точки касания сторон треугольника с окружностью, O — центр окружности и S — точка на перпендикуляре (рис. 54). Так как радиус OA перпендикулярен стороне треугольника, то по теореме о трех перпендикулярах отрезок SA есть перпендикуляр к этой стороне, а его длина — расстояние от точки S до стороны треугольника. По теореме Пифагора

$$SA = \sqrt{AO^2 + OS^2} = \sqrt{r^2 + OS^2},$$

где r — радиус вписанной окружности. Аналогично находим $SB = \sqrt{r^2 + OS^2}$, $SC = \sqrt{r^2 + OS^2}$, т. е. все расстояния от точки S до сторон треугольника равны.

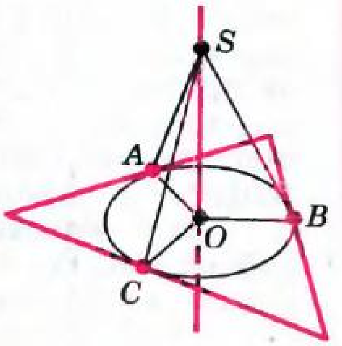

Рис. 54

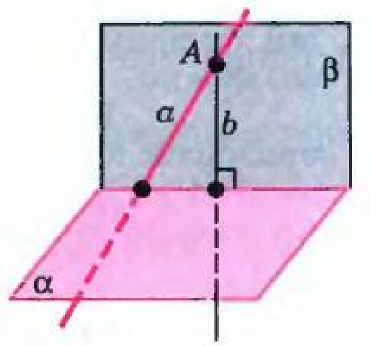

Рис. 57

ЗАДАЧА 7

Даны прямая a и плоскость α. Проведите через прямую a плоскость, перпендикулярную плоскости α.

Решение.

Через произвольную точку прямой a проводим прямую b (рис. 57), перпендикулярную плоскости α (задача 12). Через прямые a и b проводим плоскость β. Плоскость β перпендикулярна плоскости α по теореме 3.6.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Атанасян Л.С. Геометрия. 10-11 класс. / Учебник. - Москва, Просвещение, 2019. - 287 стр.
2. Погорелов А.В. Геометрия. 10-11 класс. / Учебник. - Москва, Просвещение, 2014. - 175 стр.