Лекционный материал для самостоятельной работы
по дисциплине «Математика»

Преподаватель Гречушникова Ю.С.
Группы СВ-11к, СМ-1к

Лекция №11

Изучите лекционный материал и выполните практические задания

ТЕМА: ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ЧИСЛОВОГО АРГУМЕНТА, РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ, ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ, ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Прочитайте пункты 1-2 (стр. 5-20) параграфа 1 (Тригонометрические функции числового аргумента) в учебнике и выполните практические задания.

Прочитайте пункты 8-11 (стр. 62-81) параграфа 3 (Решение тригонометрических уравнений и неравенств) в учебнике и выполните практические задания.

Элементы теории вероятностей

Высшее назначение математики... состоит в том, чтобы находить скрытый порядок в хаосе, который нас окружает.

Н. Винер

События

Всё, что происходит или не происходит в реальной действительности, называют явлениями или *событиями*. Практика показывает, что если некоторое событие происходит достаточно часто, то в его наступлении существует определённая закономерность.

Раздел математики, называемый *теорией вероятностей*, и занимается исследованием закономерностей в массовых явлениях.

Определение 1. Событие называют *случайным* по отношению к некоторому испытанию (опыту), если в ходе этого испытания оно может произойти, а может и не произойти.

Например, если испытание состоит в одном бросании игральной кости (кубика), то в ходе этого испытания возможны следующие события (*исходы* испытания): на верхней грани кости окажется число 1, число 2, ..., число 6. Каждое из этих событий является случайным, так как оно может произойти, а может и не произойти.

Случайные события обычно обозначаются начальными буквами латинского алфавита A, B, C и др.

О п р е д е л е н и е 2. Событие U называют *достоверным* по отношению к некоторому испытанию, если в ходе этого испытания событие U обязательно произойдёт.

Например, достоверным событием будет появление одного из шести чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6 при одном бросании игральной кости.

Если испытание заключается в извлечении одного шара из коробки, в которой лежат только белые шары, то извлечение белого шара будет достоверным событием.

О п р е д е л е н и е 3. Событие V называют *невозможным* по отношению к некоторому испытанию, если в ходе этого испытания событие V заведомо не произойдёт.

Например, невозможным событием является выпадение числа 7 при бросании обычного игрального кубика.

Предположим, что в результате некоторого испытания обязательно происходит одно из взаимоисключающих друг друга событий, причём каждое из них не разделяется на более простые. Такие события называют *элементарными событиями* (или *элементарными исходными* испытаниями).

Например:

1) в испытании с бросанием игрального кубика существует шесть элементарных исходов: выпадение числа 1, выпадение числа 2, ..., выпадение числа 6;

2) при бросании монеты существует два элементарных события: появление орла и появление решки;

3) при изъятии одного шара из коробки, в которой находятся два белых и один чёрный шар, существует три элементарных исхода: изъятие любого из двух белых шаров и изъятие чёрного шара;

4) при одном бросании канцелярской кнопки существуют два элементарных исхода испытания: падение кнопки с касанием острия поверхности, на которую она падает, и падение плашмя — без касания острия поверхности падения.

Рассмотренные в каждом из примеров события *несовместны* (появление одного из них исключает появление другого) и *единственно возможны* (обязательно произойдёт одно из них). Однако в первых трёх примерах элементарные события являются *равновозможными* (у каждого из них шансы появиться равны), а в четвёртом примере (для большинства реальных кнопок) шансы названных двух событий различны.

Заметим, что на практике равновозможность событий иногда удаётся определить из соображений симметрии.

Кроме элементарных событий, в теории вероятностей рассматриваются и более сложные события. Например, при бросании игрального кубика может быть рассмотрено событие A — появление чётного числа, которое «распадается» на 3 элементарных события (появление числа 2, 4 или 6).

Комбинации событий. Противоположное событие

Пусть в определенном испытании могут произойти события A и B. Рассмотрим некоторые комбинации этих событий.

О п р е д е л е н и е 1. ***Суммой (объединением)*** **событий A и B называется событие, которое состоит в том, что происходит хотя бы одно из данных событий. Сумму событий A и B обозначают $A + B$ (или $A \cup B$).**

На рисунке 166 с помощью кругов Эйлера проиллюстрировано понятие суммы событий A и B: большой круг изображает все элементарные события, которые могут произойти в рассматриваемом испытании, левый круг изображает событие A, правый — событие B, а закрашенная область — событие $A + B$.

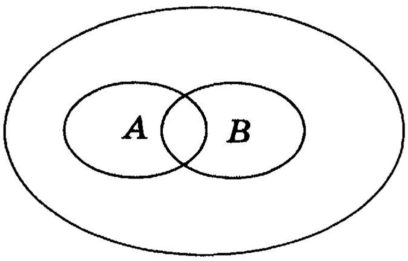

Рис. 166

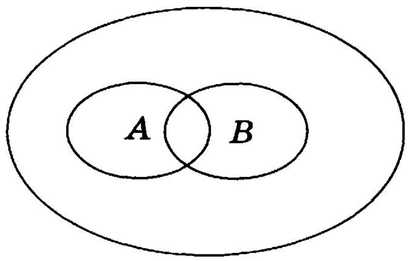

Рис. 167

Допустим, испытание состоит в определении числа на верхней грани игрального кубика после одного броска, при этом событие A — выпало чётное число, событие B — выпало число, кратное трём. Тогда событие $A + B$ состоит в том, что на верхней грани кубика появится либо чётное, либо кратное трём (либо чётное, кратное трём) число, т. е. событие $A + B$ означает, что появится одно из чисел 2, 3, 4, 6.

О п р е д е л е н и е 2. ***Произведением*** **(*пересечением*) событий A и B называется событие, которое состоит в том, что происходят оба этих события. Произведение событий A и B обозначают AB (или $A \cap B$).**

Рисунок 167 иллюстрирует с помощью кругов Эйлера произведение событий A и B: закрашенная область (общая часть кругов A и B) иллюстрирует событие AB.

Например, если событие A — выпадение чётного числа, а событие B — выпадение числа, кратного 3, в результате одного броска игрального кубика, то событие AB — выпадение чётного числа, кратного 3 (такое число одно — это 6).

Задача 1 Из колоды карт наугад вынимают одну карту и рассматривают два события: A — вынута карта пиковой масти, B — вынут король. Описать события $A + B$ и AB.

Ответ Событие $A + B$ — вынута карта пиковой масти или вынут король; событие AB — из колоды вынут король пиковой масти.

О п р е д е л е н и е 3. События A и B называют *равными* (*равносильными*) и пишут $A = B$, если событие A происходит тогда и только тогда, когда происходит событие B.

Например, если в испытании с одним бросанием игрального кубика событие A — выпало число 6, а событие B — выпало наибольшее из возможных чисел, то $A = B$.

Рассмотрим события A и $\bar{A}$ (читается «а с чертой»), связанные с одним испытанием.

Определение 4. Событие $\overline{A}$ называют ***противоположным*** событию A, если событие $\overline{A}$ происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие A.

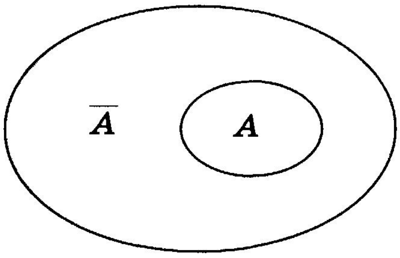

Рис. 168

Например, если событие A — выпадение чётного числа при бросании игральной кости, то $\overline{A}$ — выпадение нечётного числа; если A — попадание по мишени при одном выстреле, то $\overline{A}$ — непопадание (промах).

На рисунке 168 проиллюстрирована взаимосвязь событий A и $\overline{A}$ на множестве всех элементарных исходов испытания (событие $\overline{A}$ изображено закрашенной областью).

Задача 2 Пусть A и B — произвольные события. Записать с помощью введённых обозначений следующие события:

1) A_1 — произошли оба события;

2) A_2 — ни одно из двух событий A и B не произошло;

3) A_3 — произошло только событие A;

4) A_4 — произошло по крайней мере одно из событий A и B;

5)* A_5 — произошло либо только событие A, либо только событие B.

▶ 1) $A_1 = AB$; 2) $A_2 = \overline{A}\,\overline{B}$;

3) $A_3 = A\overline{B}$; 4) $A_4 = A + B$;

5) $A_5 = A\overline{B} + \overline{A}B$. ◁

Вероятность события

Пусть событие A связано с испытанием, имеющим n равновозможных элементарных исходов. И пусть событие A наступает тогда, когда осуществляется любой из m каких-то элементарных исходов ($m \leqslant n$), и не наступает тогда, когда осуществляется любой из оставшихся ($n - m$) исходов. Тогда говорят, что указанные m исходов, приводящие к событию A, *благоприятствуют* событию A.

Определение. *Вероятностью* $P(A)$ события A в испытании с равновозможными элементарными исходами называется отношение числа исходов m, благоприятствующих событию A, к числу n всех исходов испытания.

Таким образом,

$$P(A) = \frac{m}{n}, \text{ где } m \leqslant n. \tag{1}$$

Заметим, что вероятность наступления каждого элементарного события в испытании с n равновозможными исходами равна $\frac{1}{n}$. Так, например, появление любого из шести чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6 после одного бросания игрального кубика имеет вероятность $\frac{1}{6}$.

Из формулы (1) следует, что

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1,$$

а также

$$P(V) = 0, \ P(U) = 1,$$

где V — невозможное событие; U — достоверное событие.

Задача 1 Бросают игральную кость. Найти вероятность события: 1) A_1 — выпало чётное число; 2) A_2 — выпало число, кратное 3.

▶ Число всех возможных элементарных исходов испытания $n = 6$.

1) Событию A_1 благоприятствуют 3 исхода (числа 2, 4 и 6), т. е. $m = 3$, поэтому $P(A_1) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

2) Событию A_2 благоприятствуют 2 исхода (числа 3 и 6), т. е. $m = 2$, поэтому $P(A_2) = \frac{m}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Ответ 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{3}$. ◁

Задача 2 Бросают две монеты. Найти вероятность события A — хотя бы на одной монете выпал орёл.

▶ Обозначим появление орла на выпавшей монете буквой «О», а появление решки — буквой «Р». Тогда равновозможны следующие четыре ($n = 4$) элементарных исхода испытания: ОО, ОР, РО, РР (в каждой паре на первом месте записан результат появления орла или решки на первой монете, на втором месте — на второй монете). Событию A благоприятствуют первые 3 пары исходов ($m = 3$). Поэтому $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{4}$.

Ответ $\frac{3}{4}$. ◁

Задача 3 Игральная кость бросается дважды. Найти вероятность события A — сумма выпавших очков не меньше 10.

▶ Результаты двух бросаний игральной кости — равновозможные упорядоченные пары чисел, выбираемых из чисел 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Согласно комбинаторному правилу произведения число таких пар равно $6 \cdot 6 = 36$. Событию A благоприятствуют следующие 6 пар: 4 и 6, 6 и 4, 5 и 5, 5 и 6, 6 и 5, 6 и 6. Таким образом, $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Ответ $\frac{1}{6}$. ◁

Задача 4 В ящике лежат 3 белых и 4 чёрных одинаковых на ощупь шаров. Наугад вынимают 2 шара. Найти вероятность события: 1) A — оба вынутых шара белого цвета; 2) B — вынуты шары разного цвета.

▶ Общее число возможных исходов испытания $n = C_7^2 = \frac{7!}{5! \cdot 2!} = 21.$

1) Число благоприятствующих событию A исходов $m = C_3^2 = \frac{3!}{1! \cdot 2!} = 3$, поэтому $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}.$

2) Так как любой из 3 белых шаров может комбинироваться с любым из 4 чёрных шаров, то по правилу произведения существует $3 \cdot 4 = 12$ пар из белого и чёрного шаров, т. е. $m = 12$. Таким образом, $P(B) = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}.$

Ответ 1) $\frac{1}{7}$; 2) $\frac{4}{7}$. ◁

Сложение вероятностей

Напомним, что сумма событий A и B — это событие $A + B$, состоящее в наступлении либо только события A, либо только события B, либо и события A и события B одновременно.

Например, если стрелок сделал 2 выстрела по мишени и событие A — попадание в мишень при первом выстреле, событие B — попадание при втором выстреле, то событие $A + B$ — это попадание стрелком в мишень хотя бы при одном из выстрелов.

Теорема 1. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий, т. е.

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \qquad (1)$$

● Пусть событиям A и B, связанным с некоторым испытанием, благоприятствуют соответственно k и l исходов, а всего имеется n равновозможных исходов. Так как события A и B несовместны, то среди n исходов нет таких, которые одновременно благоприятствовали бы как событию A, так и событию B. Поэтому событию $A + B$ будут благоприятствовать $k + l$ исходов.

По определению вероятности

$$P(A) = \frac{k}{n},\ P(B) = \frac{l}{n},\ P(A + B) = \frac{k + l}{n} = \frac{k}{n} + \frac{l}{n},$$

откуда следует равенство (1). ○

Следствие. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице, т. е.

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1. \qquad (2)$$

● События A и $\overline{A}$ несовместны, поэтому по теореме 1 имеем $P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$. Но $A + \overline{A} = U$ — достоверное событие, и поэтому $P(A + \overline{A}) = P(U) = 1$, т. е. $P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) = 1$. ○

Задача 1 В ящике лежат 9 шаров, из которых 2 белых, 3 красных и 4 зелёных. Наугад берётся один шар. Какова вероятность того, что этот шар цветной (не белый)?

▶ I способ. Пусть событие A — появление красного шара, событие B — появление зелёного шара, тогда событие $A + B$ — появление цветного шара. Очевидно, что $P(A) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{4}{9}$. Так как события A и B несовместны, к ним применима теорема сложения вероятностей

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{3} + \frac{4}{9} + \frac{7}{9}.$$

II способ. Пусть событие C — появление белого шара, тогда противоположное ему событие $\overline{C}$ — появление не белого (цветного) шара. Очевидно, что $P(C) = \frac{2}{9}$, а согласно следствию из теоремы имеем

$$P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}.$$

Ответ $\frac{7}{9}$. ◁

Задача 2 Вероятность того, что при одном выстреле стрелок попадает в мишень, равна 0,8. Какова вероятность того, что, выстрелив по мишени один раз, этот стрелок промахнётся?

▶ Если событие A — попадание в цель при одном выстреле, то по условию $P(A) = 0{,}8$. Противоположное событию A событие $\overline{A}$ — промах, его вероятность $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$.

Ответ 0,2. ◁

Задача 3 В группе спортсменов 10 лыжников и 7 велосипедистов. Какова вероятность того, что среди случайным образом выбранных из этой группы пятерых человек окажется хотя бы один велосипедист?

▶ Пусть событие A — среди выбранных пятерых человек окажется хотя бы один велосипедист, тогда событие $\overline{A}$ — среди выбранных спортсменов нет ни одного велосипедиста (т. е. все — лыжники). В данном случае вероятность события $\overline{A}$ найти проще, чем $P(A)$. Найдём $P(\overline{A})$.

Число всех способов выбрать из имеющихся 17 спортсменов пятерых равно числу сочетаний из 17 по 5, т. е. $n = C_{17}^5$. Благоприятствующими событию $\overline{A}$ будут все пятерки спортсменов, выбранных из 10 лыжников. Их число $m = C_{10}^5$. Таким образом,

$$P(\overline{A}) = \frac{m}{n} = \frac{C_{10}^5}{C_{17}^5} = \frac{\dfrac{10!}{5!\cdot 5!}}{\dfrac{17!}{12!\cdot 5!}} = \frac{10!\cdot 12!}{5!\cdot 17!} =$$

$$= \frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{13\cdot 14\cdot 15\cdot 16\cdot 17} = \frac{9}{221}.$$

Теперь находим $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{9}{221} = \frac{212}{221}$.

Ответ $\frac{212}{221}$. ◁

Замечания. 1) Теорема, аналогичная теореме 1, верна для любого конкретного числа событий, т. е.

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n),$$

где $A_1, \ldots, A_n$ — попарно несовместные события.

2) Если $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — все элементарные события некоторого испытания, то их совокупность называют *полем событий*. Очевидно, что эти события попарно несовместны и $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = U$, где U — достоверное событие.

$$P(U) = P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) =$$

$$= P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n), \text{ но } P(U) = 1,$$

поэтому

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1.$$

Независимые события. Умножение вероятностей

Предположим, что из колоды в 36 карт извлекается одна карта и рассматриваются: событие A — извлечена карта трефовой масти, событие B — извлечена дама треф. Между событиями A и B очевидно наличие какой-то *зависимости*. Действительно, из 9 случаев, благоприятствующих событию A, событию B благоприятствует один; поэтому при наступлении события A вероятность события B равна $\frac{1}{9}$. Но при отсутствии информации о наступлении события A вероятность события B оценивается как равная $\frac{1}{36}$. Так как $\frac{1}{9} > \frac{1}{36}$, то очевидно, что наступление события A повышает шансы события B. Существуют, однако, пары событий, для которых факт зависимости вероятности наступления одного из них от наступления другого не очевиден.

Определение. События A и B называют *независимыми*, если выполняется равенство

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B). \qquad (1)$$

Рассмотрим опыт с бросанием двух игральных костей и исследуем два события: A — на первой кости выпало 5 очков, B — на второй кости выпало 5 очков. Выясним, будут ли события A и B независимыми.

● Появление любого числа очков на первой кости (в частности, наступление события A) не влияет на событие B и на его вероятность. И наоборот, наступление или не наступление события B не влияет на вероятность события A. Таким образом, $P(A) = \frac{1}{6}$ и $P(B) = \frac{1}{6}$.

Событие AB состоит в совместном наступлении событий A и B. Элементарные исходы испытания — это пары чисел, в которых на первом месте стоит число очков первой кости, на втором — число очков второй кости. Всего элементарных исходов испытания $n = 36$. Среди них присутствует лишь одна пара (5 и 5 очков), благоприятствующая событию AB, т. е. $m = 1$. Таким образом, $P(AB) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = P(A) \cdot P(B)$, т. е. события A и B независимые. ○

Часто о независимости событий удается судить не на основании формулы (1), а на основании того, как организован опыт, в котором они происходят. Независимые события появляются тогда, когда опыт состоит из нескольких *независимых испытаний* (как, например, было в рассмотренном опыте с бросанием двух игральных костей).

Если независимость испытаний не очевидна, то независимость событий A и B проверяется с помощью формулы (1).

Задача 1 Выяснить, являются ли события A и B независимыми, если:

1) $P(A) = 0{,}2$, $P(B) = 0{,}5$, $P(AB) = 0{,}1$;

2) $P(A) = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{2}{3}$, $P(AB) = \frac{2}{9}$.

▶ 1) Так как $P(A) \cdot P(B) = 0{,}2 \cdot 0{,}5 = 0{,}1 = P(AB)$, то события A и B являются независимыми.

2) Так как $P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{9} \neq \frac{2}{9} = P(AB)$, то события A и B не являются независимыми. ◁

Задача 2 Пусть наугад называется одно из первых десяти натуральных чисел и рассматриваются события: A — названо чётное число, B — названо число, кратное пяти. Выяснить являются ли события A и B независимыми.

▶ Среди десяти чисел 1, 2, 3, ..., 9, 10 чётных чисел 5, а кратных пяти — 2, поэтому $P(A) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$. Событие AB состоит в названии числа, кратного как числу 2, так и числу 5, т. е. числу 10. Среди первых десяти натуральных чисел таким является одно число 10, поэтому $P(AB) = \frac{1}{10}$. Так как $P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{10} = P(AB)$, то события A и B являются независимыми. ◁

Задача 3 За офисом наблюдают две независимые друг от друга видеокамеры. Вероятность того, что в течение суток первая видеокамера выйдет из строя, равна 0,001, а вероятность того, что выйдет из строя вторая, равна 0,0005. Найти вероятность того, что в течение суток выйдут из строя обе видеокамеры.

▶ Пусть событие A — выход из строя в течение рассматриваемых суток первой видеокамеры, B — выход из строя в течение тех же суток второй камеры. Согласно условию задачи $P(A) = 0{,}001 = 10^{-3}$, $P(B) = 0{,}0005 = 5 \cdot 10^{-4}$. Событие AB — выход из строя в течение суток обеих видеокамер. Считая события A и B независимыми, находим

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-4} = 5 \cdot 10^{-7}.$$

Ответ $5 \cdot 10^{-7}$. ◁

Задача 4 Вероятность попадания в цель при одном выстреле первым орудием равна 0,8, а вторым орудием — 0,7. Найти вероятность попадания в цель хотя бы одним орудием, после того как они оба, стреляя по цели, сделали по одному выстрелу.

▶ Пусть событие A — попадание в цель хотя бы одним орудием, а противоположное ему событие $\overline{A}$ наступает при промахе как первого, так и второго орудия. Вероятность промаха первого орудия равна $1 - 0,8 = 0,2$, а вероятность промаха второго равна $1 - 0,7 = 0,3$. Считая промахи орудий при стрельбе по цели независимыми событиями, находим $P(\overline{A}) = 0,2 \cdot 0,3 = 0,06$, значит, $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0,06 = 0,94$.

Ответ 0,94. ◁

Отметим еще, что события A и B несовместны, если их пересечение является невозможным событием, т. е. $AB = \varnothing$. Если события A и B несовместны, то $P(AB) = 0$.

Покажем, что справедливо равенство

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB). \tag{1}$$

Обозначим через $A \backslash B$ событие, заключающееся в том, что происходит событие A, но событие B не происходит. Так как события A и $B \backslash AB$ несовместны и $A \cup B = A + B \backslash AB$, то

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \backslash AB). \tag{2}$$

Так как события $B \backslash AB$ и AB несовместны и очевидно, что $B = B \backslash AB + AB$, то

$$P(B) = P(B \backslash AB) + P(AB). \tag{3}$$

Из равенств (2) и (3) следует равенство (1).

В примере 1 $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(AB) = \frac{1}{6}$, поэтому по формуле (1)

$$P(A \cup B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

ПРИМЕР 4. Имеется 36 игральных карт. Из колоды наудачу вынимают одну карту. Какова вероятность, что будет вынута или козырная карта, или туз?

Пусть событие A заключается в том, что вынута козырная карта, событие B — «вынут туз». Тогда событие $A \cup B$ — «вынута или козырная карта, или туз», а событие AB — «вынут козырной туз». Ясно, что $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{4}{36}$, $P(AB) = \frac{1}{36}$, поэтому по формуле (1)

$$P(A \cup B) = \frac{1}{4} + \frac{4}{36} - \frac{1}{36} = \frac{1}{3}.$$

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Алгебра и начала математического анализа: учебник для 10-11 классов общеобразовательных учреждений /Под ред. А.Н. Колмогорова. - М., Просвещение, 2008. - 384 с.