Лекционный материал для самостоятельной работы
по дисциплине «Математика»

Преподаватель Гречушникова Ю.С.
Группы СВ-11к, СМ-1к

Лекция №12

Изучите лекционный материал и выполните практические задания

ТЕМА: **Тригонометрические функции числового аргумента, Решение тригонометрических уравнений и неравенств, Элементы комбинаторики, теории вероятностей и математической статистики**

Прочитайте пункты 1-2 (стр. 5-20) параграфа 1 (Тригонометрические функции числового аргумента) в учебнике и выполните практические задания.

Прочитайте пункты 8-11 (стр. 62-81) параграфа 3 (Решение тригонометрических уравнений и неравенств) в учебнике и выполните практические задания.

Комбинаторика

В нашу современную жизнь вторгается математика с её особым стилем мышления, становящимся сейчас обязательным и для инженера, и для биолога.

Б. В. Гнеденко

Правило произведения

В курсе алгебры основной школы решались элементарные комбинаторные задачи, связанные с составлением различных соединений (комбинаций) из имеющихся элементов. Было сформулировано *правило произведения*, упрощающее в ряде случаев подсчёт числа соединений определённого вида. Напомним его.

Если существует n вариантов выбора первого элемента и для каждого из них имеется m вариантов выбора второго элемента, то всего существует $n \cdot m$ различных пар с выбранными таким образом первым и вторым элементами.

Задача 1 Сколько различных двузначных чисел можно записать с помощью цифр 0, 1, 2, 3?

▶ В качестве первой цифры может быть выбрана любая из цифр 1, 2, 3 (т. е. $n = 3$). Второй цифрой может быть выбрана любая из четырёх данных цифр 0, 1, 2, 3 (т. е. $m = 4$). Согласно правилу произведения число всевозможных двузначных чисел, составленных с помощью предложенных цифр, равно $n \cdot m = 3 \cdot 4 = 12$.

Ответ 12. ◁

Задача 2 Сколько различных трёхзначных чисел можно записать с помощью цифр 0, 1, 2, 3?

► При решении задачи 1 было установлено, что с помощью цифр 0, 1, 2 и 3 можно записать 12 различных двузначных чисел. К каждому из них можно приписать любую из четырёх имеющихся цифр, получая тем самым различные трёхзначные числа. Таким образом, согласно правилу произведения существует $12 \cdot 4 = 48$ различных трёхзначных чисел, записанных с помощью данных цифр.

Ответ 48. ◁

При решении задачи 2 фактически дважды использовалось правило произведения. Действительно, первую цифру числа можно было выбрать 3 способами, вторую к ней присоединить — любым из 4 способов, третью цифру к каждому образованному двузначному числу можно было приписать 4 способами. Всего трёхзначных чисел с помощью данных цифр можно образовать $(3 \cdot 4) \cdot 4 = 48$ способами. Таким образом, правило произведения может быть применено неоднократно для подсчёта числа соединений из трёх, четырёх и т. д. элементов, выбираемых из определённых множеств с конечным числом элементов.

Задача 3 Сколько различных пятибуквенных *слов* можно записать с помощью букв «и» и «л»? (*Словом* в комбинаторике называют любую последовательность букв; среди составленных из данных букв *слов* только слово «лилии» имеет смысл в русском языке.)

► Каждая из пяти букв составляемого *слова* последовательно выбирается из предложенных двух букв. Применив 4 раза правило произведения, найдём число всевозможных пятибуквенных *слов*, составленных из двух данных букв:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32.$$

Ответ 32. ◁

Перестановки

Задача 1 Сколькими способами можно поставить рядом на полке 4 различные книги?

▶ На первое место можно поставить любую из четырёх книг, на второе — любую из трёх оставшихся, на третье — любую из двух оставшихся и на четвёртое место — последнюю оставшуюся книгу. Применяя последовательно правило произведения, получим $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

Ответ Книги можно поставить 24 способами. ◁

В этой задаче фактически было найдено число всевозможных соединений из четырёх элементов, которые отличались одно от другого порядком расположения этих элементов. Такие соединения называют перестановками.

Определение. ***Перестановками из n элементов*** **называются соединения, которые состоят из одних и тех же n элементов и отличаются одно от другого только порядком их расположения.**

Число перестановок из n элементов обозначают P_n (P — первая буква французского слова *permutation* — перестановка) и читают «пэ энное».

В задаче 1 было найдено $P_4 = 24$.

Последовательно применяя правило произведения, можно получить формулу числа перестановок P_n из n различных элементов:

$$P_n = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1,$$
$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2)(n-1)n.$$

Произведение первых n натуральных чисел обозначают $n!$ (читается «эн факториал»), т. е. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$, причём по определению $1! = 1$. Таким образом,

$$P_n = n! \qquad (1)$$

Задача 2 Сколькими способами можно положить 6 различных открыток в 6 имеющихся конвертов (по одной открытке в конверт)?

▶ Задача сводится к нахождению числа перестановок из 6 элементов. По формуле (1) находим: $P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$.

Ответ 720 способами. ◁

Размещения

Задача 1 Сколько различных двузначных чисел можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4 при условии, что в каждой записи нет одинаковых цифр?

▶ Перебором убедимся в том, что из четырёх цифр 1, 2, 3, 4 можно составить 12 двузначных чисел, удовлетворяющих условию:

12, 13, 14,
21, 23, 24,
31, 32, 34,
41, 42, 43.

В записи двузначного числа на первом месте может стоять любая из данных четырёх цифр, а на втором — любая из трёх оставшихся. По правилу произведения таких двузначных чисел $4 \cdot 3 = 12$.

Ответ 12. ◁

При решении задачи 1 из четырёх данных элементов (цифр 1, 2, 3, 4) были образованы всевозможные соединения по два элемента в каждом, причём любые два соединения отличались либо составом элементов (например, 12 и 24), либо порядком их расположения (например, 12 и 21). Такие соединения называют размещениями.

Определение. ***Размещениями из m элементов по n элементов*** **($n \leqslant m$) называются такие соединения, каждое из которых содержит n элементов, взятых из данных m разных элементов, и которые отличаются одно от другого либо самими элементами, либо порядком их расположения.**

Число всевозможных размещений из m элементов по n элементов обозначают A_m^n и читают «А из эм по эн». Так, например, при решении задачи 1 было установлено, что $A_4^2 = 12$.
Выведем формулу для вычисления A_m^n — числа размещений из m элементов по n элементов.

● Пусть имеется m различных элементов. Тогда число размещений, состоящих из одного элемента, выбранного из имеющихся m элементов, равно m, т. е. $A_m^1 = m$.

Чтобы составить все размещения из m элементов по 2, к каждому из ранее образованных размещений из m элементов по 1 будем последовательно присоединять по одному из оставшихся $(m - 1)$ элементов. По правилу произведения число таких соединений равно $A_m^1 \cdot (m - 1)$. Таким образом, $A_m^2 = m\,(m - 1)$.

Для составления всех размещений из m по 3 к каждому из ранее полученных размещений из m элементов по 2 присоединим по очереди по одному из оставшихся $(m - 2)$ элементов. По правилу произведения число таких соединений равно $A_m^2 \cdot (m - 2)$, т. е. $A_m^3 = m\,(m - 1)\,(m - 2)$.

Последовательно применяя правило произведения, для любого $n \leqslant m$ получаем

$$\boldsymbol{A_m^n = m\,(m - 1)\,(m - 2) \cdot \ldots \cdot (m - (n - 1)).} \bigcirc \qquad (1)$$

Например, $A_4^2 = 4 \cdot 3 = 12$; $A_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$; $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Отметим, что правая часть формулы (1) содержит произведение n последовательных натуральных чисел, наибольшее из которых равно m. Пусть в формуле (1) $m = n$. Тогда

$$A_n^n = n\,(n - 1)\,(n - 2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = P_n,$$

т. е. число размещений из n элементов по n равно числу перестановок из этих элементов:

$$\boldsymbol{A_n^n = P_n.} \qquad (2)$$

Задача 2 Сколькими способами можно обозначить данный вектор, используя буквы A, B, C, D, E, F?

▶ В условии задачи даны 6 букв. Для обозначения вектора используются 2 буквы, причём порядок записи этих букв в обозначении имеет значение. Поэтому задача сводится к нахождению числа размещений из 6 по 2. Находим $A_6^2 = 6 \cdot 5 = 30$.

Ответ 30 способами. ◁

Задача 3 Решить уравнение $A_n^2 = 56$.

▶ Отметим, что $n \geqslant 2$ и $n \in N$. По формуле (1) имеем $A_n^2 = n(n-1) = n^2 - n$, т. е. $n^2 - n = 56$, откуда $n^2 - n - 56 = 0$ и $n_1 = 8$, $n_2 = -7$. Так как корнем заданного уравнения может быть натуральное число $n \geqslant 2$, то $n = -7$ — посторонний корень.

Ответ $n = 8$. ◁

Преобразуем формулу (1) для нахождения числа размещений A_m^n.

● Запишем формулу (1) следующим образом:

$$A_m^n = (m-n+1)(m-n+2) \cdot \ldots \cdot (m-1)\, m.$$

Умножив обе части этого равенства на $(m-n)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (m-n)$, получим

$$(m-n)! \cdot A_m^n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \times$$
$$\times (m-n)(m-n+1)(m-n+2) \cdot \ldots \cdot (m-1)\, m,$$

т. е. $(m-n)! \cdot A_m^n = m!$, откуда

$$A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}. \quad \bigcirc \qquad (3)$$

Для того чтобы формула (3) была справедлива не только для $n < m$, но и для $n = m$ (так как имеет смысл $A_m^m = P_m = m!$), полагают по определению $0! = 1$.

Задача 4 Вычислить: $\dfrac{A_{20}^7 + A_{20}^6}{A_{20}^5}$.

▶ Используя формулу (3), находим

$$\frac{A_{20}^7 + A_{20}^6}{A_{20}^5} = \frac{\frac{20!}{13!} + \frac{20!}{14!}}{\frac{20!}{15!}} = \frac{15!}{13!} + \frac{15!}{14!} =$$
$$= 14 \cdot 15 + 15 = 15(14+1) = 225.$$

Ответ 225. ◁

Сочетания и их свойства

Задача 1 Покупатель из имеющихся в питомнике 10 саженцев хочет выбрать 2. Сколькими способами он может это сделать?

▶ Пусть x — число всевозможных пар саженцев, выбираемых из 10 имеющихся. Если бы в выбираемой паре был важен порядок расположения саженцев, то таких пар было бы в 2 раза больше числа x, т. е. $2x$. Но число упорядоченных пар из любых элементов, выбираемых из 10 имеющихся различных элементов, равно A_{10}^2. Таким образом, $2x = A_{10}^2$, т. е. $2x = 90$, откуда $x = 45$.

Ответ 45 способами. ◁

При решении этой задачи из 10 саженцев были образованы пары — соединения по 2 саженца, которые отличались друг от друга только составом. Такие соединения называют сочетаниями.

Определение. ***Сочетаниями из m элементов по n*** в каждом ($n \leqslant m$) называются соединения, каждое из которых содержит n элементов, взятых из данных m разных элементов, и которые отличаются одно от другого по крайней мере одним элементом.

Число всевозможных сочетаний из m различных элементов по n элементов обозначают C_m^n (C — первая буква французского слова *combinaison* — сочетание) и читают «це из эм по эн». При решении задачи 1 было установлено, что $C_{10}^2 = 45$.

Выведем формулу для подсчёта числа сочетаний из m различных элементов по n элементов в каждом.

● Образуем все соединения, содержащие n элементов, выбранных из данных m разных элементов, без учёта порядка их расположения. Число таких соединений равно C_m^n.

Из каждого полученного соединения перестановками его элементов можно образовать $P_n = n!$ соединений, отличающихся одно от другого только порядком расположения элементов. Тем самым получим все размещения из m элементов по n, число которых равно A_m^n. По правилу произведения число таких соединений равно $C_m^n \cdot P_n$. Итак, $C_m^n \cdot P_n = A_m^n$, откуда

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n}. \quad ○ \qquad (1)$$

Например, $C_5^3 = \frac{A_5^3}{P_3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10.$

Заметим, что если $m = n$, то $C_n^n = \frac{A_n^n}{P_n} = \frac{P_n}{P_n} = 1.$

Учитывая, что $A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$ при $m \geqslant n$ и $P_n = n!$,

формулу (1) можно представить в виде

$$C_m^n = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!}, \qquad (2)$$

где $m \geqslant n$.

Например, $C_7^4 = \frac{7!}{(7-4)! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35.$

Задача 2 Сколько существует способов выбора двух карт из колоды в 36 карт?

▶ Изымаемые из колоды всевозможные пары карт без учёта порядка их расположения в наборе образуют сочетания из 36 по 2. По формуле (2) находим

$$C_{36}^2 = \frac{36!}{(36-2)!\cdot 2!} = \frac{36!}{34!\cdot 2!} = \frac{35\cdot 36}{2} = 35\cdot 18 = 630.$$

Ответ 630 способов. ◁

Рассмотрим два свойства сочетаний, которые в ряде случаев упрощают вычисления при решении задач.

Свойство 1. $C_m^n = C_m^{m-n}$.

● По формуле (2) имеем

$$C_m^n = \frac{m!}{(m-n)!\cdot n!},$$

$$C_m^{m-n} = \frac{m!}{(m-(m-n))!\cdot (m-n)!} = \frac{m!}{n!\cdot (m-n)!},$$

т. е. $C_m^n = C_m^{m-n}$. ○

Свойство 2 (рекуррентное свойство).

$$C_m^n + C_m^{n+1} = C_{m+1}^{n+1}.$$

● Воспользуемся соотношением (1):

$$C_m^n + C_m^{n+1} = \frac{A_m^n}{P_n} + \frac{A_m^{n+1}}{P_{n+1}} =$$

$$= \frac{m(m-1)\dots(m-(n-1))}{n!} + \frac{m(m-1)\dots(m-(n-1))(m-n)}{(n+1)!} =$$

$$= \frac{m(m-1)\dots(m-(n-1))(n+1) + m(m-1)\dots(m-(n-1))(m-n)}{(n+1)!} =$$

$$= \frac{m(m-1)\dots(m-(n-1))(\cancel{n}+1+m-\cancel{n})}{(n+1)!} =$$

$$= \frac{(m+1)m(m-1)\dots(m-(n-1))}{(n+1)!} = \frac{A_{m+1}^{n+1}}{P_{n+1}} = C_{m+1}^{n+1}.$$ ○

Задача 3 Найти значение выражения $C_{20}^{18} + C_{20}^{19}$.

▶ Воспользуемся свойством 2, получим $C_{20}^{18} + C_{20}^{19} = C_{21}^{19}$. По формуле (2) имеем

$$C_{21}^{19} = \frac{21!}{(21-19)!\cdot 19!} = \frac{21!}{2!\cdot 19!} = \frac{20\cdot 21}{2} = 210.$$

Ответ 210. ◁

Бином Ньютона

В теории многочленов часто двучлены называют *биномами*. Рассмотрим целые неотрицательные степени бинома $a + b$ (при условии $a + b \neq 0$):

$(a + b)^0 = 1,$

$(a + b)^1 = 1 \cdot a + 1 \cdot b,$

$(a + b)^2 = 1 \cdot a^2 + 2ab + 1 \cdot b^2,$

$(a + b)^3 = 1 \cdot a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1 \cdot b^3,$

$(a + b)^4 = (a + b)^3 (a + b) =$

$= 1 \cdot a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1 \cdot b^4,$

$(a + b)^5 = (a + b)^4 (a + b) =$

$= 1 \cdot a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1 \cdot b^5$

и т. д.

Можно доказать справедливость следующей формулы, называемой биномиальной формулой Ньютона:

$$\begin{aligned}(a + b)^m = C_m^0 \cdot a^m + C_m^1 \cdot a^{m-1}b + \\ + C_m^2 \cdot a^{m-2}b^2 + \ldots + C_m^n \cdot a^{m-n}b^n + \ldots + \\ + C_m^{m-1} \cdot ab^{m-1} + C_m^m \cdot b^m.\end{aligned} \qquad (1)$$

Формулу (1) чаще всего называют просто *биномом Ньютона*, а числа C_m^n — *биномиальными коэффициентами*, которые могут быть найдены по формуле

$$C_m^n = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!}.$$

Биномиальные коэффициенты легко находить с помощью так называемого *треугольника Паскаля* — таблицы значений C_m^n, составленной на основании рекуррентного свойства числа сочетаний $C_m^n + C_m^{n+1} = C_{m+1}^{n+1}$ с учётом того, что $C_m^0 = C_m^n = 1$.

Ниже приводится фрагмент треугольника Паскаля, в котором стрелками показан процесс получения определённых членов таблицы на основании рекуррентного свойства. Например, при $m = 4$ имеем строку 1, 4, 6, 4, 1, полученную из предыдущей строки следующим образом: $4 = 1 + 3$, $6 = 3 + 3$, $4 = 3 + 1$ (первый и последний члены строки равны $C_4^0 = C_4^4 = 1$).

m \ n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1 ⊕	1									
2	1 ⊕	2 ⊕	1								
3	1 ⊕	3 ⊕	3 ⊕	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	7	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Эта таблица наглядно иллюстрирует свойство 1 числа сочетаний $C_m^n = C_m^{m-n}$, которое можно сформулировать так: числа, одинаково удалённые от концов строки треугольника Паскаля, равны.

Задача 1 Записать разложение бинома $(x - 2)^6$.

▶ По формуле (1) находим

$$(x-2)^6 = (x + (-2))^6 =$$
$$= C_6^0 x^6 + C_6^1 x^5 \cdot (-2) + C_6^2 x^4 \cdot (-2)^2 + C_6^3 x^3 \cdot (-2)^3 +$$
$$+ C_6^4 x^2 \cdot (-2)^4 + C_6^5 x \cdot (-2)^5 + C_6^6 \cdot (-2)^6 =$$
$$= x^6 + 6x^5 \cdot (-2) + 15x^4 \cdot 4 + 20x^3 \cdot (-8) +$$
$$+ 15x^2 \cdot 16 + 6x \cdot (-32) + 64 =$$
$$= x^6 - 12x^5 + 60x^4 - 160x^3 + 240x^2 - 192x + 64. \ \triangleleft$$

Заметим, что при записи разложения степени бинома полезно контролировать следующие моменты: 1) число членов получаемого многочлена на единицу больше показателя m степени бинома, т. е. равно $m + 1$;

2) показатели степени первого слагаемого бинома последовательно убывают на единицу от m до 0, а показатели второго последовательно возрастают на единицу от 0 до m;

3) биномиальные коэффициенты, равноудалённые от начала и конца разложения по формуле (1), равны между собой.

Задача 2 Доказать свойство элементов строки треугольника Паскаля:

$$C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + \ldots + C_m^{m-1} + C_m^m = 2^m. \qquad (2)$$

▶ Равенство (2) получается из равенства (1) при $a = b = 1$. ◁

Задача 3* Найти член разложения $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$, содержащий x^2.

▶ $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10} = \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)^{10}$. Общий член разложения десятой степени бинома $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}$ имеет вид $C_{10}^n \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{10-n} \cdot \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^n$. Для того чтобы некоторый член этого разложения содержал x^2, должно выполняться равенство

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{10-n} \cdot \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^n = x^2. \qquad (3)$$

Но $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{10-n} \cdot \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^n = x^{5-\frac{n}{2}} \cdot x^{-\frac{n}{2}} = x^{5-n}$. Равенство (3) выполняется при $5 - n = 2$, т. е. при $n = 3$. При $n = 3$ имеем $C_{10}^3 = 120$.

Ответ $120x^2$. ◁

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Алгебра и начала математического анализа: учебник для 10-11 классов общеобразовательных учреждений /Под ред. А.Н. Колмогорова. - М., Просвещение, 2008. - 384 с.