Лекционный материал для самостоятельной работы
по дисциплине «Математика»

Преподаватель Гречушникова Ю.С.
Группы СВ-11к, СМ-1к

Лекция №13

Изучите лекционный материал и выполните практические задания

ТЕМА: РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ, КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА, СТЕРЕОМЕТРИЯ, ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛА, ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ, ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Прочитайте пункты 8-11 (стр. 62-81) параграфа 3 (Решение тригонометрических уравнений и неравенств) в учебнике и выполните практические задания.

Прочитайте пункт 31 (стр.188-193) параграфа 8 (Интеграл) в учебнике и выполните практические задания.

Статистика

Цель математически оформленных теорий состоит не только в том, чтобы описать с помощью точных формул уже накопленные знания, но и в том, чтобы предсказать новые явления.

Б. В. Гнеденко

Случайные величины

Статистика занимается сбором, представлением (в виде таблиц, диаграмм, графиков и др.) и анализом информации о различных случайных величинах.

Случайными величинами называют такие величины, которые в ходе наблюдений или испытаний могут принимать различные значения. Можно говорить о том, что их значения зависят от случая.

Например, сумма чисел (очков), выпадающая при бросании двух игральных костей, — случайная величина. Обозначим её X, тогда $X_1 = 2$, $X_2 = 3$, $X_3 = 4$, ..., $X_{11} = 12$ — значения этой случайной величины. В таблице 1 указаны суммы выпавших чисел, а в таблице 2 показано распределение значений случайной величины X (суммы выпавших чисел) по их вероятностям P: каждой из сумм X_1, X_2, X_3, ..., X_{11} поставлена в соответствие вероятность, с которой она может появиться в результате одного испытания (одного бросания двух игральных костей).

Например, сумма $X_2 = 3$ появляется в двух благоприятствующих случаях ($1 + 2$ и $2 + 1$) из 36 возможных, поэтому $P_2 = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

Таблица 1

I кость / II кость	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Таблица 2

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Для наглядности распределение значений случайной величины X, представленное в таблице 2, может быть изображено в виде, например, линейной или столбчатой диаграммы.

Заметим, что сумма вероятностей ΣP[1] всех значений величины X (записанных во второй строке таблицы 2) равна 1, как сумма вероятностей всех элементарных исходов испытания с нахождением суммы очков при одном бросании двух игральных костей (см. предыдущую главу).

Таблицы распределения значений случайной величины, аналогичные таблице 2, составляются по результатам теоретических расчётов вероятностей. На практике часто после проведения реальных испытаний составляются таблицы распределения значений случайных величин по частотам (или по относительным частотам), после чего для большей наглядности распределение данных представляют либо в виде диаграммы, либо в виде *полигона частот* (полигона относительных частот).

Задача Имеются результаты 20 измерений диаметра d болта (в миллиметрах с точностью до 0,1):

10,1; 10,0; 10,2; 10,1; 9,8; 9,9; 10,0;
10,0; 10,2; 10,0;
10,0; 9,9; 10,0; 10,1; 10,0; 9,9; 10,0;
10,1; 10,1; 10,0.

Представить эти данные с помощью: 1) таблиц распределения по частотам M и относительным частотам W; 2) полигона частот.

▶ 1) Имеющиеся данные (значения случайной величины d) представим в виде таблицы 3 распределения по частотам и относительным частотам:

Таблица 3

d	9,8	9,9	10,0	10,1	10,2
M	1	3	9	5	2
$W = \frac{M}{N}$	0,05	0,15	0,45	0,25	0,1

Отметим, что $\Sigma M = N = 20$, $\Sigma W = 1$.

2) На рисунке 173 представлено распределение значений d в виде полигона частот. ◁

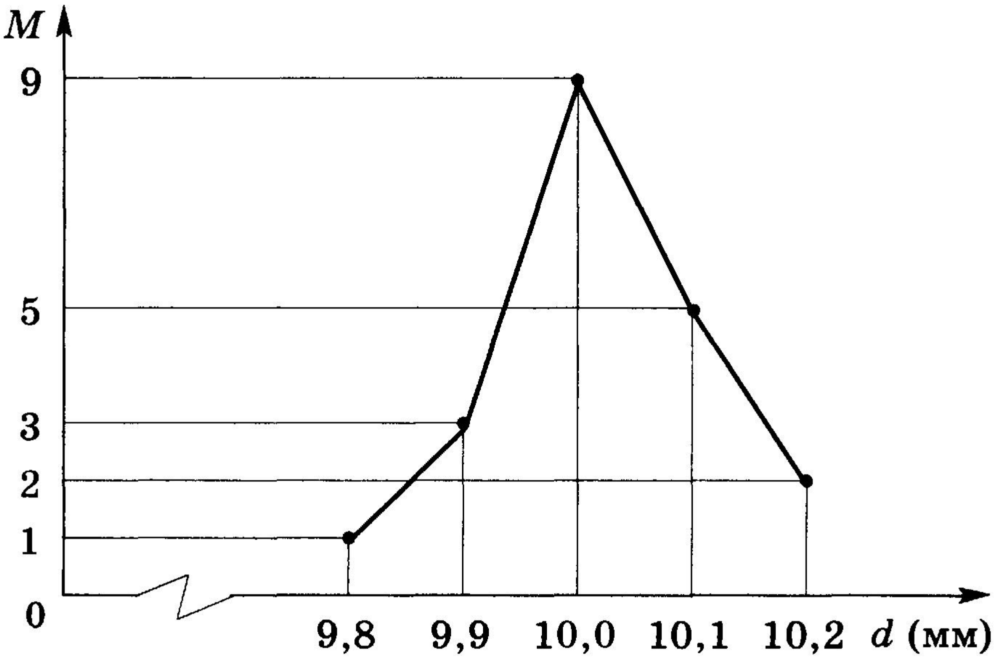

Рис. 173

* Рассмотренные в этом параграфе случайные величины принимали изолированные друг от друга значения. Такие величины называют *дискретными* (от лат. *discretus* — раздельный, прерывистый).

Если случайная величина может принимать любое значение из некоторого промежутка, то такая величина называется *непрерывной*. Например, время T ожидания автобуса на остановке, когда пассажир приходит на остановку случайным образом, а автобусы ходят с интервалом 10 мин, есть непрерывная случайная величина, принимающая любое числовое значение $T \in [0; 10]$.

Очевидно, число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно. Однако существует способ, с помощью которого можно задать распределение и непрерывной случайной величины. Для этого промежуток значений величины разбивают на части (обычно — на равные) и считают частоты (или вероятности) попадания значений случайной величины в каждую из них.

Рассмотрим п р и м е р. Пусть время горения T (в часах) электрической лампочки некоторого вида $T \in [0; 1000]$. Тогда промежуток $[0; 1000]$ можно разделить к примеру на 5 одинаковых по длине промежутков и результаты горения каждой из 100 экспериментальных лампочек занести в частотную таблицу 4:

Таблица 4

T	[0; 200)	[200; 400)	[400; 600)	[600; 800)	[800; 1000]
M	1	3	10	18	68

Отметим, что $\Sigma M = N = 100$.

Данные этой таблицы можно представить с помощью так называемой *гистограммы частот* — ступенчатой фигуры (рис. 174).

Если основанием каждой ступени служит промежуток длиной h, то высоту столбца берут равной $\frac{M}{h}$, где M — частота значений величины X на соответствующем промежутке. Тогда площадь такого столбца будет равна $\frac{M}{h} \cdot h = M$, а площадь фигуры под гистограммой равна $\Sigma M = N$.

Если по данным таблицы 4 заполнить таблицу 5 относительных частот, то построенную на её основе ступенчатую фигуру называют *гистограммой относительных частот* (рис. 175).

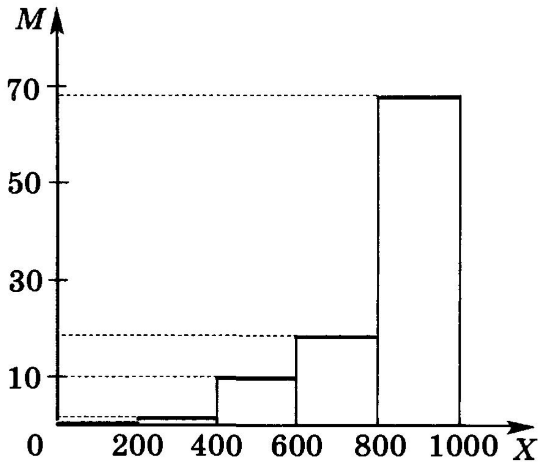

Рис. 174

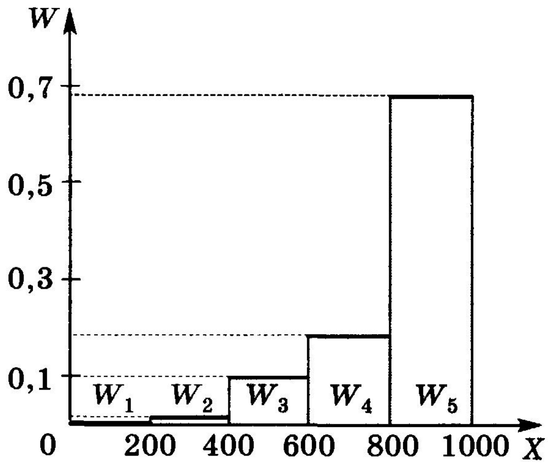

Рис. 175

Таблица 5

X	[0; 200)	[200; 400)	[400; 600)	[600; 800)	[800; 1000]
W	0,01	0,03	0,1	0,18	0,68

Гистограмму относительных частот строят обычно таким образом, чтобы площадь каждого столбца под ступенькой была равна соответствующему значению W. Тогда площадь фигуры под гистограммой будет равна единице ($\Sigma W = 1$). *

Центральные тенденции

Однотипные объекты можно сравнивать по общим параметрам, присущим этим объектам. Например, российские монеты можно сравнивать по номиналу, весу, диаметру; юношей одного класса можно сравнивать по возрасту, весу, росту и др. Каждый из названных параметров может принимать определённые числовые значения.

В статистике исследуют различные совокупности данных — числовых значений случайных величин с учётом частот, с которыми они встречаются в совокупности. При этом совокупность всех данных называют *генеральной совокупностью*, а любую выбранную из неё часть — *выборкой*. В статистических исследованиях выборку называют *репрезентативной* (от фр. *representative* — представительный), если в ней присутствуют те и только те значения случайной величины, что и в генеральной совокупности, причём частоты имеющихся в ней данных находятся практически в тех же отношениях, что и в генеральной совокупности.

Рассмотрим пример. Пусть некоторая случайная величина X имеет распределение своих значений по частотам M, представленное в таблице 6,

Таблица 6

X	–1	2	6	8
M	200	500	700	300

и пусть совокупность всех значений этой величины принята за генеральную совокупность. Тогда выборку из этой совокупности, распределение которой представлено в таблице 7, следует считать репрезентативной, так как $200 : 500 : 700 : 300 = 2 : 5 : 7 : 3$ и в выборке присутствуют те и только те значения X, которые присутствуют в генеральной совокупности. Выборки же, представленные в таблицах 8 и 9, не являются репрезентативными.

Таблица 7

X	–1	2	6	8
M	2	5	7	3

Таблица 8

X	–1	2	8
M	2	5	3

Таблица 9

X	–1	2	6	8
M	2	9	7	3

Совокупность данных иногда бывает полезно охарактеризовать (оценить) одним числом — *мерой центральной тенденции* числовых значений её элементов. К таким характеристикам относятся мода, медиана и среднее.

Мода (обозначают Mo) — это значение случайной величины, имеющее наибольшую частоту в рассматриваемой выборке.

Например, мода выборки 7, 6, 2, 5, 6, 1 равна 6; выборка 2, 3, 8, 2, 8, 5 имеет две моды: $Mo_1 = 2$, $Mo_2 = 8$.

Медиана (обозначают Me) — это число (значение случайной величины), разделяющее упорядоченную выборку на две равные по количеству данных части. Если в упорядоченной выборке нечётное количество данных, то медиана равна серединному из них. Если в упорядоченной выборке чётное количество данных, то медиана равна среднему арифметическому двух серединных чисел.

Задача 1 Найти медиану выборки значений случайной величины: 1) 5, 9, 1, 4, 5, –2, 0; 2) 7, 4, 2, 3, 6, 1.

▶ 1) Расположим элементы выборки в порядке возрастания: –2, 0, 1, 4, 5, 5, 9. Количество данных нечётно. Слева и справа от числа 4 находятся

по 3 элемента, т. е. 4 — серединное число выборки, поэтому $Me = 4$.

2) Упорядочим элементы выборки: 1, 2, 3, 4, 6, 7. Количество данных чётно. Серединные данные выборки: 3 и 4, поэтому $Me = \frac{3+4}{2} = 3{,}5$.

Ответ 1) 4; 2) 3,5. ◁

Среднее (или *среднее арифметическое*) выборки — это число, равное отношению суммы всех чисел выборки к их количеству. Если рассматривается совокупность значений случайной величины X, то её среднее обозначают $\overline{X}$.

Задача 2 Найти среднее выборки значений случайной величины X, распределение которых по частотам представлено в таблице 10.

Таблица 10

X	2	3	4	8	10
M	1	2	3	1	1

▶ $$\overline{X} = \frac{2\cdot1 + 3\cdot2 + 4\cdot3 + 8\cdot1 + 10\cdot1}{1+2+3+1+1} = \frac{2+6+12+8+10}{8} =$$

$$= \frac{38}{8} = 4{,}75.$$

Ответ 4,75. ◁

* Одной из наиболее распространённых характеристик выборки значений случайной величины, чьё распределение по вероятностям известно, является так называемое *математическое ожидание.*

Пусть распределение по вероятностям P значений некоторой случайной величины X задано таблицей 11.

Таблица 11

X	X_1	X_2	X_3	...	X_{n-1}	X_n
P	P_1	P_2	P_3	...	P_{n-1}	P_n

Тогда число E, где

$$E = X_1P_1 + X_2P_2 + X_3P_3 + \ldots + X_{n-1}P_{n-1} + X_nP_n, \quad (1)$$

называют *математическим ожиданием* (или *средним значением*) случайной величины X.

Например, для случайной величины X — суммы чисел, выпавших при бросании двух игральных кубиков (её распределение представлено в таблице 2), можно найти её математическое ожидание:

$$E = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + 5 \cdot \frac{4}{36} + 6 \cdot \frac{5}{36} + 7 \cdot \frac{6}{36} +$$

$$+ 8 \cdot \frac{5}{36} + 9 \cdot \frac{4}{36} + 10 \cdot \frac{3}{36} + 11 \cdot \frac{2}{36} + 12 \cdot \frac{1}{36} =$$

$$= \frac{1}{36}(2 + 6 + 12 + 20 + 30 + 42 + 40 + 36 + 30 + 22 + 12) =$$

$$= \frac{1}{36} \cdot 252 = 7.$$

Понятие математического ожидания широко используется в теории игр.

Рассмотрим пример. Предположим, что в некоторой игре с двумя игроками первый игрок может выиграть X_1, X_2, ..., X_k рублей (среди чисел X_1, X_2, ..., X_k могут быть отрицательные и 0, а суммарный выигрыш обоих игроков всегда равен 0). При этом вероятность того, что первый игрок выиграет X_i рублей, равна P_i. Тогда средний выигрыш первого игрока будет равен $E = X_1P_1 + X_2P_2 + \ldots + X_kP_k$.

Игра называется *справедливой*, если $E = 0$, т. е. если $X_1P_1 + X_2P_2 + \ldots + X_kP_k = 0$. Игра называется *выгодной* (не выгодной) для первого игрока, если $E > 0$ ($E < 0$). *

Меры разброса

Не каждую выборку имеет смысл оценивать с помощью центральных тенденций. Например, если исследуется выборка

$$80,\ 80,\ 320,\ 4600 \qquad (1)$$

годовых доходов (в тысячах рублей) четверых человек, то очевидно, что ни мода (80), ни медиана (200), ни среднее (1270) не могут выступать в роли единой объективной характеристики данной выборки. Это объясняется тем, что наименьшие значения выборки (1) существенно отличаются от наибольшего — разность наибольшего и наименьшего значений соизмерима с наибольшим значением.

Определение 1. Разность наибольшего и наименьшего значений случайной величины выборки называется её *размахом* и обозначается R.

Так, для выборки (1) размах $R = 4600 - 80 = 4520$. Размах показывает, как велик разброс значений случайной величины в выборке. Однако, зная только размах выборки, невозможно охарактеризовать отличие её элементов друг от друга, отличие каждого элемента от среднего значения. Возникает вопрос: как сравнить, например, две выборки, имеющие одинаковые размахи и одинаковые средние значения? Рассмотрим реальную ситуацию на примере.

На место токаря претендуют двое рабочих. Для каждого из них установили испытательный срок, в течение которого они должны были изготавливать одинаковые детали. Результаты работы претендентов представлены в таблице 12.
Каждый из рабочих за 5 дней изготовил 250 деталей, значит, средняя производительность труда за день у обоих рабочих одинаковая:

$$\overline{X} = \overline{Y} = \frac{250}{5} = 50 \text{ (дет./день).}$$

Таблица 12

День недели	Дневная выработка	
	первого рабочего (X)	второго рабочего (Y)
Понедельник	52	61
Вторник	54	40
Среда	50	55
Четверг	48	50
Пятница	46	44
	$\Sigma X = 250$	$\Sigma Y = 250$

Моды у предложенных совокупностей отсутствуют, а медианы одинаковые (50 и 50). Кого же из этих рабочих предпочтительнее взять на работу? В данном случае в качестве критерия сравнения совокупностей может выступать *стабильность* производительности труда рабочего. Её можно оценивать с помощью отклонений от среднего значения элементов совокупности.

О п р е д е л е н и е 2. ***Отклонением от среднего*** **называют разность между рассматриваемым значением случайной величины и средним значением выборки.**

Например, если значение величины $X_1 = 52$, а значение среднего $\overline{X} = 50$, то отклонение X_1 от среднего будет равно $X_1 - \overline{X} = 52 - 50 = 2$.

Очевидно, отклонение от среднего может быть как положительным, так и отрицательным числом. Нетрудно показать, что *сумма отклонений всех значений выборки от среднего значения равна нулю.* Поэтому характеристикой стабильности элементов совокупности может служить *сумма квадратов отклонений от среднего.*

Из предложенной ниже таблицы 13 видно, что у второго рабочего сумма квадратов отклонений от среднего больше, чем у первого рабочего:

$$\Sigma\,(X - \overline{X})^2 < \Sigma\,(Y - \overline{Y})^2.$$

На практике это означает, что второй рабочий имеет нестабильную производительность труда: в какие-то дни работает не в полную силу, а в какие-то

Таблица 13

День недели	Значение случайной величины		Отклонение от среднего $\overline{X} = \overline{Y} = 50$		Квадраты отклонений	
	X	Y	$X - \overline{X}$	$Y - \overline{Y}$	$(X - \overline{X})^2$	$(Y - \overline{Y})^2$
Понедельник	48	50	−2	0	4	0
Вторник	54	40	4	−10	16	100
Среда	50	55	0	5	0	25
Четверг	52	61	2	11	4	121
Пятница	46	44	−4	−6	16	36
Сумма	**250**	**250**	**0**	**0**	**40**	**282**

навёрстывает упущенное, что всегда сказывается на качестве продукции. Очевидно, что работодатель предпочтёт взять на место токаря первого рабочего (у которого сумма квадратов отклонений от средней производительности меньше).

Если бы рабочие работали разное количество дней и производили в среднем за день одинаковое число деталей, то стабильность работы каждого из них можно было бы оценить по величине *среднего арифметического квадратов отклонений.*

Такая величина называется *дисперсией* (от лат. *dispersio* — рассеяние) и обозначается буквой D.

Для случайной величины X, принимающей N различных значений и имеющей среднее значение $\overline{X}$, дисперсия находится по формуле

$$D = \frac{(X_1 - \overline{X})^2 + (X_2 - \overline{X})^2 + \ldots + (X_N - \overline{X})^2}{N}. \qquad (1)$$

Задача 1 Два токаря вытачивали одинаковые детали, причём первый трудился полную рабочую неделю, а второй по распоряжению начальника — 4 дня. Сведения об их дневной выработке представлены в таблице 14. Сравнить стабильность работы токарей.

▶ Найдём средние значения выборок данных величин X и Y:

$$\overline{X} = \frac{53 + 54 + 49 + 48 + 46}{5} = \frac{250}{5} = 50,$$

$$\overline{Y} = \frac{52 + 46 + 53 + 49}{4} = \frac{200}{4} = 50.$$

Очевидно, $\overline{X} = \overline{Y}$.

Таблица 14

День недели	Дневная выработка	
	первого токаря (X)	второго токаря (Y)
Понедельник	53	52
Вторник	54	46
Среда	49	53
Четверг	48	49
Пятница	46	—

С помощью таблицы 15 найдём суммы квадратов отклонений от средних всех значений величин X и Y.

Таблица 15

День недели	Значение случайной величины		Отклонение от среднего		Квадрат отклонения от среднего	
	X	Y	$X - 50$	$Y - 50$	$(X - 50)^2$	$(Y - 50)^2$
Понедельник	53	52	3	2	9	4
Вторник	54	46	4	−4	16	16
Среда	49	53	−1	3	1	9
Четверг	48	49	−2	−1	4	1
Пятница	46	—	−4	—	16	—
				Сумма:	46	30

$$D_X = \frac{46}{5} = 9{,}2, \text{ а } D_Y = \frac{30}{4} = 7{,}5, \text{ т. е. } D_X > D_Y.$$

Ответ Второй токарь работает стабильнее первого. ◁

Если значения X_1, X_2, ..., X_k случайной величины X повторяются с частотами M_1, M_2, ..., M_k соответственно, то дисперсию величины X можно вычислить по формуле

$$D = \frac{(X_1 - \overline{X})^2 M_1 + (X_2 - \overline{X})^2 M_2 + \ldots + (X_k - \overline{X})^2 M_k}{M_1 + M_2 + \ldots + M_k}, \quad (1)$$

где $\overline{X} = \dfrac{X_1 M_1 + X_2 M_2 + \ldots + X_k M_k}{M_1 + M_2 + \ldots + M_k}$.

Используя знак суммы Σ, формулу (1) можно записать компактнее:

$$D = \frac{\Sigma\left((X-\overline{X})^2 M\right)}{\Sigma M}, \text{ где } \overline{X} = \frac{\Sigma(XM)}{\Sigma M}.$$

Пусть величина X имеет некоторую размерность (например, сантиметры). Тогда её среднее значение $\overline{X}$ и отклонение от среднего $X - \overline{X}$ имеют ту же размерность, что и сама величина (в сантиметрах). Квадрат же отклонения $(X - \overline{X})^2$ и дисперсия D имеют размерности квадрата этой величины (в квадратных сантиметрах).

Для оценки степени отклонения от среднего значения удобно иметь дело с величиной той же размерности, что и сама величина X. С этой целью используют значения корня квадратного из дисперсии $\sqrt{D}$.

Определение. Корень квадратный из дисперсии называют ***средним квадратичным отклонением*** и обозначают σ, т. е. $\sigma = \sqrt{D}$.

Задача 2 Распределение по частотам значений величины X — числа забитых голов игроками футбольной команды за период соревнований показано в таблице 16. Найти среднее квадратичное отклонение от среднего значения числа всех забитых голов.

Таблица 16

X	0	1	2	3
M	4	2	3	1

▶ Результаты последовательных вычислений будем заносить в таблицу 17, при этом:

$$\Sigma M = 10,\ \overline{X} = \frac{\Sigma(X \cdot M)}{\Sigma M} = \frac{11}{10} = 1{,}1.$$

Таблица 17

X	0	1	2	3
M	4	2	3	1
$X - \overline{X}$	–1,1	–0,1	0,9	1,9
$(X - \overline{X})^2$	1,21	0,01	0,81	3,61
$(X - \overline{X})^2 \cdot M$	4,84	0,02	2,43	3,61

$$D = \frac{\Sigma\left((X - \overline{X})^2 \cdot M\right)}{\Sigma M} = \frac{4{,}84 + 0{,}02 + 2{,}43 + 3{,}61}{10} =$$

$$= \frac{10{,}9}{10} = 1{,}09,$$

$$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{1{,}09} \approx 1{,}04.$$

Ответ $\sigma \approx 1{,}04$. ◁

Задача 3 Продавец обуви имеет возможность выбрать, в каком из двух мест (в точке A или точке B) ставить по рабочим дням торговую палатку. В первую очередь его интересует объём продаж, а во вторую — стабильность ежедневных продаж. Продавец провёл исследование: по рабочим дням в январе он торговал в точке A, а в феврале — в точке B. Результаты продаж фиксировались, после чего были составлены две таблицы распределения значений величины X_A и величины X_B — количества проданных за день пар обуви в точках A и B соответственно:

X_A	1	2	3	4	5
M_A	2	7	7	4	2

X_B	1	2	3	4	6
M_B	3	5	6	5	1

Какой торговой точке следует отдать предпочтение?

▶ Очевидно, в январе было 22 рабочих дня ($\Sigma M_A = 22$), а в феврале было 20 рабочих дней ($\Sigma M_B = 20$). Найдём величины среднесуточных продаж обуви в точках A и B:

$$\overline{X}_A = \frac{\Sigma(X_A \cdot M_A)}{\Sigma M_A} = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 2}{22} = \frac{63}{22} \approx 2{,}86;$$

$$\overline{X}_B = \frac{\Sigma(X_B \cdot M_B)}{\Sigma M_B} = \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 5 + 6 \cdot 1}{20} = \frac{57}{20} = 2{,}85.$$

Среднее значение суточных продаж оказалось практически одинаковым (примем $\overline{X}_A = \overline{X}_B = \overline{X} = 2{,}9$), значит, предпочтение следует отдать точке с более стабильной торговлей. Для этого нужно сравнить средние квадратичные отклонения совокупностей значений X_A и X_B. Результаты вычислений будем заносить в таблицы:

X_A	1	2	3	4	5
M_A	2	7	7	4	2
$X_A - \overline{X}$	–1,9	–0,9	0,1	1,1	2,1
$(X_A - \overline{X})^2$	3,61	0,81	0,01	1,21	4,41
$(X_A - \overline{X})^2 \cdot M_A$	7,22	5,67	0,07	4,84	8,82

X_B	1	2	3	4	6
M_B	3	5	6	5	1
$X_B - \overline{X}$	–1,9	–0,9	0,1	1,1	3,1
$(X_B - \overline{X})^2$	3,61	0,81	0,01	1,21	9,61
$(X_B - \overline{X})^2 \cdot M_B$	10,83	4,05	0,06	6,05	9,61

$$D_A = \frac{\Sigma\left((X_A - \overline{X})^2 \cdot M_A\right)}{\Sigma M_A} = \frac{7{,}22 + 5{,}67 + 0{,}07 + 4{,}84 + 8{,}82}{22} =$$

$$= \frac{26{,}62}{22} = 1{,}21 \text{ (пар}^2\text{)},$$

$$\sigma_A = \sqrt{D_A} = \sqrt{1{,}21} = 1{,}1 \text{ (пар)};$$

$$D_B = \frac{\Sigma\left((X_B - \overline{X})^2 \cdot M_B\right)}{\Sigma M_B} = \frac{10{,}83 + 4{,}05 + 0{,}06 + 6{,}05 + 9{,}61}{20} =$$

$$= \frac{30{,}6}{20} = 1{,}53 \text{ (пар}^2\text{)},$$

$$\sigma_B = \sqrt{D_B} = \sqrt{1{,}53} \approx 1{,}24 \text{ (пар)}.$$

Так как $\sigma_A < \sigma_B$, то точка A предпочтительнее для организации в ней торговли, чем точка B. ◁

З а м е ч а н и е. Дисперсию и среднее квадратичное отклонение в статистике называют также *мерами рассеивания* значений случайной величины около среднего значения.

2. Геометрический смысл модуля комплексного числа

Выясним геометрический смысл $|z|$.

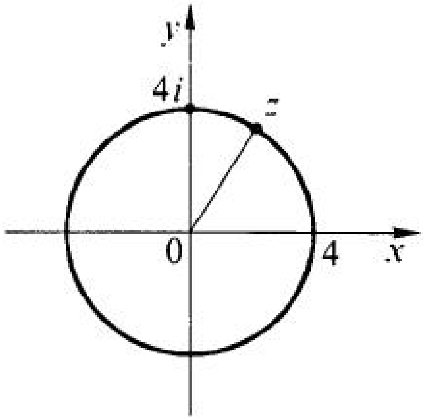

Рис. 73

Пусть $z = a + bi$. Тогда, по определению модуля, $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$. Это означает, что $|z|$ — расстояние от точки 0 до точки z (рис. 72).

Например, равенство $|z|=4$ означает, что расстояние от точки 0 до точки z равно 4 (рис. 73). Поэтому множество всех точек z, удовлетворяющих равенству $|z|=4$, является окружностью с центром в точке 0 радиуса 4. Уравнение $|z|=R$ называют уравнением окружности с центром в точке 0 радиуса R. Здесь R — заданное положительное число.

3. Геометрический смысл модуля разности комплексных чисел

Выясним геометрический смысл $|z_1-z_2|$.

Пусть $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$. Тогда $|z_1 - z_2| = |(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i| = \sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2}$.

Из курса геометрии известно, что это число равно расстоянию между точками с координатами $(a_1; b_1)$ и $(a_2; b_2)$.

Итак, $|z_1-z_2|$ — расстояние между точками z_1 и z_2.

Например, расстояние между точками 1 и $-3+3i$ равно

$$|1-(-3+3i)|=|4-3i|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5.$$

Покажем, что $|z-z_0|=R$ — уравнение окружности с центром в точке z_0 радиуса R.

Здесь z_0 — заданное комплексное число, R — заданное положительное число.

○ Так как $|z-z_0|$ — расстояние между точками z и z_0, то множество всех точек z, удовлетворяющих уравнению $|z-z_0|=R$, — это множество всех точек, расстояние от которых до точки z_0 равно R. ●

Например, $|z+i|=2$ — уравнение окружности с центром в точке $-i$ радиуса 2, так как данное уравнение можно записать в виде $|z-(-i)|=2$ (рис. 74).

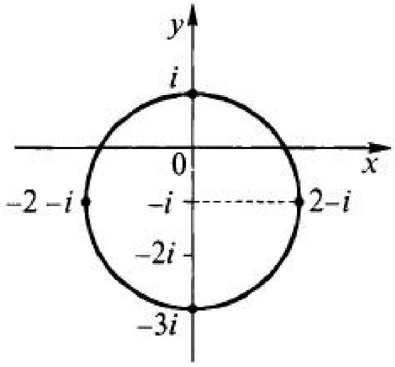

Рис. 74

§ 23. Тригонометрическая форма комплексного числа

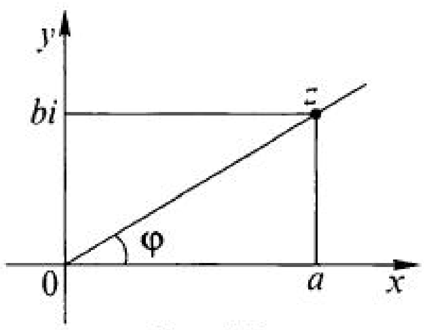

Рис. 76

Рассмотрим на комплексной плоскости точку $z = a + bi$, отличную от нуля (рис. 76). Пусть луч Oz получается в результате поворота положительного луча Ox оси абсцисс на угол φ радиан. Тогда $a = |z|\cos\varphi$, $b = |z|\sin\varphi$.

Поэтому число z можно записать так:

$$z = |z|\cos\varphi + i\,|z|\sin\varphi = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Обозначим $|z|$ буквой r. Тогда получим

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \qquad (1)$$

Запись комплексного числа $z \neq 0$ в виде (1) называется *тригонометрической формой комплексного числа*.

В этой записи $r = |z|$ — модуль комплексного числа. Число φ называют *аргументом комплексного числа*. Заметим, что аргумент определяется с точностью до слагаемого, кратного 2π.

Итак, любое комплексное число $z \neq 0$ можно записать в тригонометрической форме. Для числа 0 понятия аргумента и тригонометрической формы не определяются.

Запись комплексного числа в виде $a + bi$, где a и b — действительные числа, называется *алгебраической формой* этого числа.

Если $z = a + bi$, то $r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$ и равенство (1) можно записать в виде

$$a + bi = \sqrt{a^2+b^2}\cos\varphi + i\sqrt{a^2+b^2}\sin\varphi,$$

откуда, приравнивая действительные и мнимые части, получаем

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \qquad (2)$$

Таким образом, если φ — аргумент комплексного числа $a + bi$, то справедливы равенства (2). Верно и обратное утверждение: если φ — такое число, что выполняются оба равенства (2), то φ — аргумент комплексного числа $a + bi$.

Например, для комплексного числа $1 + i$ имеем $a = 1$, $b = 1$ и равенства (2) принимают вид $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Этим двум равенствам удовлетворяют числа $\varphi = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, и только они. Каждое из них является аргументом числа $1 + i$ (рис. 77). Число $k \in \boldsymbol{Z}$ часто выбирается таким, чтобы аргумент φ был заключен в пределах от 0 до 2π. Таким аргументом числа $1 + i$ является $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

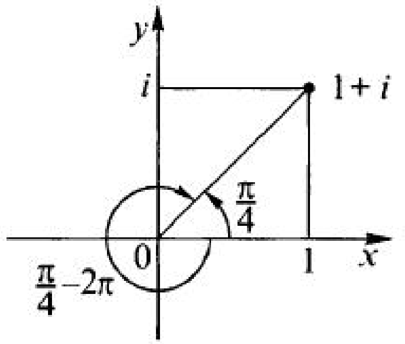

Рис. 77

Для нахождения аргумента обычно пользуются не формулами (2), а более простой формулой

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}, \qquad (3)$$

которая получается почленным делением второго из равенств (2) на первое.

Если φ — аргумент числа $a + bi$, т.е. выполняются равенства (2), то выполняется и равенство (3). Однако не все значения φ, удовлетворяющие равенству (3), являются аргументами числа $a + bi$. Поэтому при нахождении аргумента числа $a + bi$ с помощью формулы (3) еще нужно учесть, в какой четверти расположена точка $a + bi$.

З а д а ч а 1. Найти все аргументы числа $-1+i\sqrt{3}$ и записать это число в тригонометрической форме.

Δ По формуле (3)

$$\operatorname{tg}\varphi=-\sqrt{3}. \tag{4}$$

Так как действительная часть числа $-1+i\sqrt{3}$ отрицательна, а мнимая часть положительна, то это число лежит во второй четверти и поэтому угол φ также лежит во второй четверти. Учитывая это, из равенства (4) находим

$$\varphi=\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\quad k\in \mathbf{Z}.$$

Для записи числа $-1+i\sqrt{3}$ в тригонометрической форме найдем его модуль: $|-1+i\sqrt{3}|=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$. Следовательно,

$$-1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right). \ \blacktriangle$$

З а д а ч а 2. Записать в тригонометрической форме комплексное число $z=-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$.

$$\Delta\ r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2+2}=2,\ \operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}=\frac{-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}}=1.$$

Точка $-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$ расположена в третьей четверти, поэтому угол φ также лежит в третьей четверти. Учитывая это, из равенства $\operatorname{tg}\varphi=$ $=1$ находим:

$$\varphi=\frac{5\pi}{4}+2\pi k,\quad \text{где } k\in \mathbf{Z}.$$

О т в е т . $z=2\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$. $\blacktriangle$

Действительное число является частным случаем комплексного числа $z = a + bi$ при $b = 0$, поэтому его также можно записать в тригонометрической форме. Например:

$$3 = 3\,(\cos 0 + i\sin 0),\quad -4 = 4\,(\cos\pi + i\sin\pi).$$

Аналогично записываются в тригонометрической форме чисто мнимые числа. Например:

$$2i=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right);$$

$$-3i=3\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right).$$

Отметим, что при записи комплексного числа в тригонометрической форме косинус и синус берутся от одного и того же угла φ, равного аргументу числа z, а между косинусом и синусом стоит знак «+».

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Алгебра и начала математического анализа: учебник для 10-11 классов общеобразовательных учреждений /Под ред. А.Н. Колмогорова. - М., Просвещение, 2008. - 384 с.